

THE
PRINCESS OF WALES
SARASVATI BHAVANA
TEXTS SERIES

*(Published under the authority of the Government
of the United Provinces)*

General Editor

DR. MANGAL DEVA SHASTRI,
M.A , D. PHIL. (OXON),
PRINCIPAL,
GOVERNMENT SANSKRIT COLLEGE,
BENARES

No. 80

PART II

CHALARĀŚIKALANA

म० म० सुधाकरद्विवेदिविरचितं

चलराशिकलनम्

पञ्चमाध्यायतोऽवशिष्टभागः

THE
CHALARĀŚIKALANA

BY

M. M. Sudhakara Dwivedi

PART II

Edited

BY

PANDIT BALDEVA MISHRA
JYAUTISHACHARYA JYAUTISH TIRTH
SARASVATI BHAVANA
BENARES.

1943

मुद्रक—
माधव विष्णु पराङ्कर,
ज्ञानमण्डल सभ्रालय, काशी । १९९९

पुनर्निवेदनम् ।

ग्रन्थस्यास्य प्रथमभागस्य प्रकाशनावसरे मया निवेदितं यद्ग्रन्थान्ते विशेष-
प्रणञ्चः प्रदर्शितो भविष्यति । परञ्च महादुस्तरेऽस्मिन्महायुद्धकाले पत्रप्राप्त्यभावा-
द्विशेषलेखनादिदानीं विरम्यते । युरोपीयगणिते 'लिमिट' शब्देनाव्यक्तस्य यन्मानं
कल्प्यते तत्रास्मिन्ग्रन्थे एकधैव तन्मानं शून्यं मत्वा गणितं प्रदर्शितम् । एवं
स्वरूपाणां लेखनेऽपि किञ्चिद्द्वैशिष्ट्यमस्ति । सर्वमिदं कालान्तरे चलराशिकलन-
परिशिष्टरूपेण प्रकाशितं भविष्यतीत्याशासे ।

अत्र विशेषत इदं कथनीयमस्ति यद्गणितविद्याप्रचाराय विद्यारसिकैः
काशिकराजकीयसंस्कृतविद्यालयाध्यक्षैः श्रीमद्भिर्डाक्टरमङ्गलदेवशास्त्रिवर्यैर्यया
शुभेच्छयैतादृशदुर्लभपुस्तकप्रकाशनाय यतितं तत्रास्माकं दौर्भाग्यात्प्रायो मूलच्छेद
एव दृश्यते गणितविषयकपरीक्षाया अपाकरणात् । तथापि दृढमाशासे यद्विश्वेश्वर-
कृपया तादृशो गणितप्रकर्षकालः समागमिष्यति यदा पुनरपि बह्मादरेण ग्रन्थरत्नमिदं
काशिकराजकीयसंस्कृतपरीक्षासु पाठ्यरूपेण स्वीकरिष्यते इति निगदति

काश्यां सरस्वतीभवने
१-३-४३

बलदेवमिश्रो
ज्यौतिषाचार्यः

पञ्चमाध्याय ५ ।

प्रक्रम	पृष्ठ
५८। द्विगुणचल का वर्णन	... १२१
५९। $\frac{\text{तांस}}{\text{तायतार}}$ इससे स का पता लगाना	... १२१
६०। स के मान में दो विधि पर से विशेष	... १२१—१२२
६१। $\iint f(y,r)$ ताय तार का अर्थ	... १२२—१२३
६२। ६० प्रक्रम से सान्त द्विगुणचलानयन	... १२३—१२४
६३। ६२ वें प्रक्रम के सिद्धान्त को २ प्रक्रम से सिद्ध करना	... १२४—१२६
६४। $\int f(y,r)$ तार में विशेष	... १२६
६५। यदि $f(y,r) = f_a(y) \times f_r(r)$ तो इसके सान्तद्विगुणचल में विशेष	... १२६—१२७
६६। त्रिगुणचलानयन	... १२७
६७। क्रिया समेत कुछ उदाहरण और अभ्यास के लिये प्रश्न	... १२७—१३२
६८। चलराशिकलन में कुछ विशेष	... १३२—१३३

षष्ठाध्याय ६ ।

६९। वक्रक्षेत्रों के चापानयन में विधि	... १३४
७०। परवलय (Parabola) का चाप जानना	... १३४—१३५
७१। चक्रालव (Cycloid) का चाप जानना	... १३५
७२। $r = \frac{m}{n}$ इस वक्र का चापानयन	... १३५—१३६
७३। कातन्वली (Catenary) का चापानयन	... १३६
७४। $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ इस वक्र का चापानयन	... १३६
७५। ६९ वें प्रक्रम में विशेष	... १३७—१३८
७६। लाघुरिक्र्थिक वक्र (Logarithmic Curve) का चापानयन	... १३८
७७। दीर्घवृत्त का चापानयन	... १३९—१४०
७८। अतिपरवलय का चापानयन	... १४०—१४१

७९।	आर्किमिडिज़ के सर्पिल का चापानयन (The Spiral of Archimedes)	...	१४१—१४२
८०।	श्रु = अ(१ + कोज्या) इस वक्र का चापानयन	...	१४२
८१।	लाघुरिकृत्थिक सर्पिल का चापानयन	..	१४२
८२।	अपचक्रालद (Epicycloid) का चापानयन	...	१४२—१४३
८३।	अतिचक्रालद (Hypocycloid) का चापानयन	...	१४३—१४४
८४।	स्पर्शरेखा पर मूलविन्दु से पड़े लम्ब और य अक्ष से उत्पन्न कोण इन दोनों के वश से वक्र का चापानयन	...	१४४—१४८
८५।	८४ प्रक्रम की व्याप्ति के लिये दो उदाहरण	...	१४८—१५१
८६।	अतिपरवलय के चापानयन में ल्याण्डन का सिद्धान्त (Landen's Theorem on a Hyperbolic Arc.)	...	१५१—१५३
८७।	डाक्टर ग्रेव का सिद्धान्त (Theorem of Dr. graves)	...	१५३—१५४
८८।	एकनामिक अतिपरवलय और दीर्घवृत्त में विशेष	...	१५४—१५५
८९।	डिकार्टेस के आवल (Oval of Descartes) का चापानयन	...	१५५—१५६
९०।	वक्र के अनवलूत से चलज्ञान के बिना चापानयन	...	१५६—१५७
९१।	भुज, कोटि के रूप में यदि चाप विदित हो तो अनवलूत का समीकरण	...	१५७—१५९
९२।	अक्षीय भुजयुग्म के रूप में जो चाप है उससे अनवलूत का अक्षीय भुजयुग्म सम्बन्धी समीकरण का ज्ञान	...	१५९—१६०
९३।	वक्र के स्पर्शरेखा से और वक्रस्थ नियतविन्दु की स्पर्शरेखा से उत्पन्न कोण जो हो उसके फलरूप में चापानयन	...	१६०—१६१
९४।	चापस्पर्शिकसमीकरण से वक्र का समीकरण जानना	...	१६२—१६५
९५।	चापस्पर्शिकसमीकरण से वक्रजातीयवृत्त का व्यासार्द्ध जानना	...	१६५
९६।	चापस्पर्शिकसमीकरण से अवलूत का समीकरण जानना	...	१६६—१६७
९७।	चाप पर से वक्र के भुज, कोटि का ज्ञान	...	१६७—१६८
९८।	आकाशीय वक्र का चापानयन	...	१६८—१७०
९९।	$\frac{\text{ताचा}}{\text{ताका}}$ के मान का आनयन	...	१७०—१७१

प्रक्रम	पृष्ठ
१००। आकाशीय वक्र में अक्षीय भुजयुग्म से विशेष	... १७१
१०१। अन्तरिक्षीय वक्र की स्पर्शरेखा पर मूलबिन्दु से पड़े लम्ब से चापानयन, और अभ्यास के लिये प्रश्न	... १७१—१७५

सप्तमाध्याय ७।

१०२। वक्र के फलानयन की विधि	... १७६
१०३। वृत्त का फलानयन	... १७६—१७७
१०४। दीर्घवृत्त का फलानयन	... १७७
१०५। परवलय का फलानयन	... १७७
१०६। $r = a \cos^n$ इस वक्र का फलानयन	... १७७
१०७। अतिपरवलय का फलानयन	... १७७—१७८
१०८। चक्रालद का फलानयन	... १७८—१७९
१०९। कातन्वली का फलानयन	... १७९
११०। $\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{2m+1}} + \left(\frac{x}{k}\right)^{\frac{2}{2n+1}} = 1$ इस वक्र का फलानयन	१७९—१८०
१११। फलानयन में सीमा के विचार में विशेष	... १८०—१८२
११२। सम्पूर्ण वक्र के फलानयन में विशेष	... १८२—१८३
११३। दो कोटियों के भीतर फलानयन में विशेष	... १८३
११४। दो वक्रों के चाप और उनके कोट्यन्तर से बने क्षेत्र का फलानयन	... १८४—१८५
११५। दो वक्रों से सीमित क्षेत्र का फलानयन	... १८५
११६। ११४-११५ प्रक्रमों की व्याप्ति के लिये एक उदाहरण	... १८५—१८८
११७। अक्षीय भुजयुग्म से वक्र का फलानयन	... १८८—१८९
११८। समास्रिक सर्पिल (Equiangular Spiral) का फलानयन	... १८९
११९। अक्षीय भुजयुग्म पर से परवलय का फलानयन	... १९०
१२०। $\theta = a(\phi + \text{ज्या}\phi)$ इस वक्र का फलानयन	... १९०
१२१। $\theta = 2a \frac{\text{कोज्या}\phi - \sqrt{(\text{कोज्या}^2\phi)}}{\text{ज्या}\phi}$ इस वक्र का फलानयन	१९०—१९१
१२२। $\theta = a\phi^n$ इस वक्र का फलानयन	... १९१—१९३

प्रक्रम	पृष्ठ
१२३। इलामूलक का फलानयन ...	१९३
१२४। दो वक्र के चाप और श्रुत्यन्तर से बने क्षेत्र का फलानयन ...	१९३—१९५
१२५। १२४ वें प्रक्रम में विशेष ...	१९५
१२६। १२४ - १२५ प्रक्रमों के लिये उदाहरण ...	१९६—१९८
१२७। १२६ वें प्रक्रम में विशेष ...	१९८—१९९
१२८। आर्किमिडिज़ के सर्पिल के फलानयन में १२४ वें प्रक्रम की युक्ति ...	१९९—२००
१२९। अक्षीय समीकरण से अपचक्रालङ्क का फलानयन ...	२००—२०१
१३०। वक्रों के साजात्य अवयवों के फलों का संबन्ध ...	२०१—२०३
१३१। वक्रचाप और अवलूतचाप से बने क्षेत्र का फलानयन ...	२०३
१३२। कातन्वली उसका अवलूत और वक्रजातीय दो व्यासार्द्ध इनसे बने क्षेत्र का फलानयन ...	२०३—२०४
१३३। पाददल का लक्षण ...	२०४
१३४। मूलविन्दु से पाददल के मूलवक्र के कोई दो स्पर्शरेखाओं पर दो लम्ब डाले जायं तो पाददल का चाप और इन दोनों लम्बों से बने क्षेत्र का फलानयन ...	२०४—२०५
१३५। $अय^२ + कयर + गर^२ + घय + चर + फ = ०$ इस पर से पता लगाना कि कौन वक्र है ...	२०५—२०८
१३६। १३४ प्रक्रम में विशेष ...	२०८
१३७। एक निर्दिष्टरेखा के दोनो अग्र दो वक्र के परिधि पर घूमने से निर्दिष्टरेखास्थ निर्दिष्ट विन्दु के घूमने से जो वक्र होगा उसका फलानयन ...	२०९—२१०
१३८। स्वल्यान्तर से वक्रों का फलानयन ...	२१०—२१४
१३९। फलानयन में प्रकारान्तर ...	२१४
१४०। फलसाधन के लिये यन्त्र (Planimeters) और अभ्यास के लिये प्रश्न ...	२१४—२२३

अष्टमाध्याय ८ ।

१४१। पृष्ठफलानयन विधि ...	२२४—२२५
१४२। शङ्कु का पृष्ठफल ...	२२५

प्रक्रम	पृष्ठ
१४३। शङ्कु के पृष्ठफल का प्रकारान्तर	... २२५
१४४। गोल का पृष्ठफलानयन	... २२६—२२७
१४५। बृहच्च्वास के चारो ओर दीर्घवृत्त के घूमने से जो घनक्षेत्र हो उसका पृष्ठफलानयन	... २२७—२२८
१४६। परवलय का चाप य अक्ष के चारो ओर घूम कर जो घनक्षेत्र बनाता है उसका पृष्ठफलानयन	... २२८
१४७। कातन्वली (Catenary) का पृष्ठफलानयन	... २२८—२३०
१४८। पृष्ठफल में विशेष	... २३०—२३१
१४९। $\theta = \alpha (1 + \cos \theta)$ इस वक्र के स्थिर रेखा के चारो ओर घूमने से जो वक्र हो उसका पृष्ठफलानयन	... २३१
१५०। स्पर्शधरातल का साधन	... २३१—२३४
१५१। परिणतक्षेत्र का फलानयन	... २३४—२३५
१५२। स्पर्शधरातल से किसी घनक्षेत्र का पृष्ठफल	... २३५—२३८
१५३। घनक्षेत्र के पृष्ठ में विशेष	... २३८—२३९
१५४। स्पर्शधरातल से पृष्ठफलानयन में विशेष	... २३९
१५५। पृष्ठ के अक्षीय समीकरण से पृष्ठफलानयन	... २४०
१५६। घनफलानयनविधि	... २४०—२४१
१५७। समसूची का घनफलानयन	... २४१
१५८। गोल का घनफलानयन	... २४१
१५९। परवलय के य अक्ष के चारो ओर घूमने से जो घनक्षेत्र हो उसका घनफलानयन	... २४१—२४२
१६०। य अक्ष के चागे ओर घूमने से चक्रालद के घनक्षेत्र का घनफलानयन	... २४२—२४३
१६१। र अक्ष के चारो ओर घूमने से चक्रालद के घनक्षेत्र का घनफलानयन	... २४३
१६२। परवलय के र अक्ष के चागे ओर घूमने से जो घनक्षेत्र हो उसका घनफलानयन	... २४३
१६३। दो घनक्षेत्र और दो धरातलों के भीतर घनक्षेत्र खण्ड का घनफलानयन	... २४३—२४४

प्रक्रम	पृष्ठ
१२३। इलामूलक का फलानयन ...	१९३
१२४। दो वक्रकेचाप और श्रुत्यन्तर से बने क्षेत्र का फलानयन ...	१९३—१९५
१२५। १२४ वें प्रक्रम में विशेष ...	१९५
१२६। १२४ - १२५ प्रक्रमों के लिये उदाहरण ...	१९६—१९८
१२७। १२६ वें प्रक्रम में विशेष ...	१९८—१९९
१२८। आर्किमिडिज़ के सर्पिल के फलानयन में १२४ वें प्रक्रम की युक्ति ...	१९९—२००
१२९। अक्षीय समीकरण से अपचक्रालद का फलानयन ...	२००—२०१
१३०। वक्रों के साजात्य अवयवों के फलों का संबन्ध ...	२०१—२०३
१३१। वक्रचाप और अवलूतचाप से बने क्षेत्र का फलानयन ...	२०३
१३२। कातन्वली उसका अवलूत और वक्रजातीय दो व्यासार्द्ध इनसे बने क्षेत्र का फलानयन ...	२०३—२०४
१३३। पाददल का लक्षण ...	२०४
१३४। मूलविन्दु से पाददल के मूलवक्र के कोई दो स्पर्शरेखाओं पर दो लम्ब डाले जायं तो पाददल का चाप और इन दोनों लम्बों से बने क्षेत्र का फलानयन ...	२०४—२०५
१३५। $अय^२ + कयर + गर^२ + वय + चर + फ = ०$ इस पर से पता लगाना कि कौन वक्र है ...	२०५—२०८
१३६। १३४ प्रक्रम में विशेष ...	२०८
१३७। एक निर्दिष्टरेखा के दोनो अग्र दो वक्र के परिधि पर घूमने से निर्दिष्टरेखास्थ निर्दिष्ट विन्दु के घूमने से जो वक्र होगा उसका फलानयन ...	२०९—२१०
१३८। स्वल्यान्तर से वक्रों का फलानयन ...	२१०—२१४
१३९। फलानयन में प्रकारान्तर ...	२१४
१४०। फलसाधन के लिये यन्त्र (Planimeters) और अभ्यास के लिये प्रश्न ...	२१४—२२३

अष्टमाध्याय ८ ।

१४१। पृष्ठफलानयन विधि ...	२२४—२२५
१४२। शङ्कु का पृष्ठफल ...	२२५

प्रक्रम	पृष्ठ
१४३। शङ्कु के पृष्ठफल का प्रकारान्तर ...	२२५
१४४। गोल का पृष्ठफलानयन ...	२२६—२२७
१४५। वृहद्भ्यास के चारो ओर दीर्घवृत्त के घूमने से जो घनक्षेत्र हो उसका पृष्ठफलानयन ...	२२७—२२८
१४६। परवलय का चाप य अक्ष के चारो ओर घूम कर जो घनक्षेत्र बनाता है उसका पृष्ठफलानयन ...	२२८
१४७। कातन्वली (Catenary) का पृष्ठफलानयन ...	२२८—२३०
१४८। पृष्ठफल में विशेष ...	२३०—२३१
१४९। $y = a(1 + \cos^2 x)$ इस वक्र के स्थिर रेखा के चारो ओर घूमने से जो वक्र हो उसका पृष्ठफलानयन ...	२३१
१५०। स्पर्शधरातल का साधन ...	२३१—२३४
१५१। परिणतक्षेत्र का फलानयन ...	२३४—२३५
१५२। स्पर्शधरातल से किसी घनक्षेत्र का पृष्ठफल ...	२३५—२३८
१५३। घनक्षेत्र के पृष्ठ में विशेष ...	२३८—२३९
१५४। स्पर्शधरातल से पृष्ठफलानयन में विशेष ...	२३९
१५५। पृष्ठ के अक्षीय समीकरण से पृष्ठफलानयन ...	२४०
१५६। घनफलानयनविधि ...	२४०—२४१
१५७। समसूची का घनफलानयन ...	२४१
१५८। गोल का घनफलानयन ...	२४१
१५९। परवलय के य अक्ष के चारो ओर घूमने से जो घनक्षेत्र हो उसका घनफलानयन ...	२४१—२४२
१६०। य अक्ष के चारो ओर घूमने से चक्रालद के घनक्षेत्र का घनफलानयन ...	२४२—२४३
१६१। र अक्ष के चारो ओर घूमने से चक्रालद के घनक्षेत्र का घनफलानयन ...	२४३
१६२। परवलय के र अक्ष के चारो ओर घूमने से जो घनक्षेत्र हो उसका घनफलानयन ...	२४३
१६३। दो घनक्षेत्र और दो धरातलों के भीतर घनक्षेत्र खण्ड का घनफलानयन ...	२४३—२४४

प्रक्रम	पृष्ठ
१६३। १६३वें प्रक्रम में विशेष	... २४४—२४५
१६४। घनफल में विशेष	... २४५
१६५। दैर्घवृत्तीय घनक्षेत्र का पृष्ठफलानयन	... २४५
१६६। किसी सूचीक्षेत्र का घनफलानयन	... २४५—२४६
१६७। शङ्कु, अतिपरवलयिक और दो लम्बरूपी ध्रुगतल के भीतर घनक्षेत्र का घनफलानयन	... २४६
१६८। १६७ वें प्रक्रम का विशेष	... २४६—२४७
१६९। स्वप्नान्तर से घनफलानयन	... २४७
१७०। द्विगुणचलानयन से घनफल	... २४७—२४८
१७१। विशेषघनक्षेत्र का घनफलानयन	... २४८
१७२। व्याप्ति दिखाने के लिये प्रकार	... २४८—२४९
१७३। घनफलानयन में विशेष	... २४९
१७४। घनफलानयन में विशेष	... २४९—२५०
१७५। दैर्घवृत्तीय घनक्षेत्र का घनफलानयन	... २५०
१७६। एक विशेषघनक्षेत्र का घनफलानयन	... २५०—२५१
१७७। दूसरे एक विशेषघनक्षेत्र का घनफलानयन	... २५१
१७८। प्रकागन्तर से घनफलानयन	... २५१—२५२
१७९। जिस पृष्ठ का ल = अ इ - $\frac{\text{श्रु}^2}{\text{ग}}$ - यह समीकरण है उस के और यह अक्ष के भीतर के घनक्षेत्र का पृष्ठफलानयन	... २५२
१८०। घनफलसाधन में विशेष	... २५२—२५३
१८१। नलक के खण्ड का घनफलानयन	... २५३
१८२। १७८ वें प्रक्रम में विशेष	... २५३—२५४
१८३। एक विशेषघनक्षेत्र का घनफलानयन	... २५४
१८४। श्रु = अ (१ + कोज्याप) इस वक्र के स्थिर रेखा के चारो ओर घूमने से जो घनक्षेत्र होगा उसका घनफलानयन	... २५४—२५५
१८५। दो विशिष्टघनक्षेत्रों के घनफल में संबन्ध, और अभ्यास के लिये प्रश्न	... २५५—२६३

प्रक्रम

पृष्ठ

नवमाध्याय ९ ।

१८६।	सान्तचल का वर्णन	...	२६४
१८७।	\int_0^{π} ज्यामय ज्यानय ताय का मान	...	२६४—२६५
१८८।	\int_0^{π} ज्यामय को ज्यामय ताय का मान	...	२६५—२६७
१८९।	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{फ(य)}{फा(य)}$ ताय का मान	...	२६७—२६९
१९०।	१८९ वें प्रक्रम का एक चमत्कृत उदाहरण	...	२६९—२७०
१९१।	$\int_0^{\infty} \frac{य^{२म}}{१ - य^{२न}}$ ताय का मान	...	२७०—२७१
१९२।	१९०—१९१ प्रक्रमों में विशेष	...	२७१—२७२
१९३।	सान्तचलानयन की विधि से तात्कालिकसंबन्ध ज्ञान	...	२७२—२७३
१९४।	$स = \int_a^k फ(य,ग)$ ताय यहां ग को स्वतन्त्र मान		
	$\frac{तास}{ताग}$ का मान जानना	...	२७३—२७५
१९५।	१९४ वें प्रक्रम में विशेष	...	२७५—२७६
१९६।	$\frac{तास}{ताग}$ का मान क्षेत्र की रीति से	...	२७६—२७७
१९७।	कुछ उदाहरण	...	२७७—२७९
१९८।	फ्रुलानी का सिद्धान्त (Theorem of Frullani)	...	२७९—२८१
१९९।	यूलर के चल (Eulerian Integrals)	...	२८१—२८२
२००।	यूलर के पहले चल में विशेष	...	२८२
२०१।	यूलर के दूसरे चल में विशेष	...	२८१—२८३
२०२।	यूलर के दूसरे चल में दूसरा विशेष	...	२८३
२०३।	यूलर के दोनों चलों में संबन्ध	...	२८३—२८४
२०४।	$\frac{\{ गा (न) \}^२}{\{ गा (न - म) \} \{ गा (न + म) \}}$ का मान	...	२८४—२८५

प्रक्रम	पृष्ठ
२०५। गा (१—म) गा (म) का मान ...	२८५
२०६। गा(१ - $\frac{१}{n}$) गा (१ - $\frac{१}{n}$) गा ($\frac{१}{n}$) का मान ...	२८५—२८६
२०७। गास (Gauss) का सिद्धान्त ...	२८६
२०८। २०७ प्रक्रम में विशेष ...	२८७—२८९
२०९। २०८ प्रक्रम में विशेष ...	२८९—२९०
२१०। ला (१ + य) का मान श्रेंढी में ...	२९०
२११। गा (१ + य) का न्यूनतम मान ...	२९०—२९१
२१२। $\int_0^{\infty} e^{-x^2-y^2}$ ताय का मान गाढफल में ...	२९१—२९२
२१३। $\iiint \dots x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1} \dots$ तालतागताय का मान गाढफल के रूप में ...	२९२
२१४। $\iiint \dots a^{p-1} b^{q-1} c^{r-1} \dots$ ताख, ताक, ताअ, का मान गाढफल के रूप में ...	२९२—२९३
२१५। एक अनेक गुणचल को एक चल में ले आना ...	२९३—२९४
२१६। एक त्रिगुणचल को एक चल में ले आना ...	२९४
२१७। एक द्विगुणचल को एक चल में ले आना ...	२९४—२९५
२१८। $\int_0^{\infty} e^{-ax^2-y^2}$ कोज्यारय ताय का मान ...	२९५—२९६
२१९। $\int_0^{\infty} e^{-ax^2-y^2}$ ज्या रय य - ताय का मान ...	२९६—२९७
२२०। $\int_0^{\infty} e^{-(y^2 + \frac{a^2}{y^2})}$ ताय का मान ...	२९७—२९८
२२१। $\int_0^1 y^m (\text{लाय})^n$ ताय इसका मान ...	२९८
२२२। $\int_0^1 \frac{\text{लाय ताय}}{१-y}$ का मान ...	२९८
२२३। सान्तचलानयन के लिये एक सिद्धान्त ...	२९९

प्रक्रम		पृष्ठ
२२४।	$\int_{0}^{\infty} \text{क. फ(य, ज) ताय ताज का मान}$... २०९
२२५।	$\int_{0}^{\infty} \frac{इ-अय - इ-कय}{य} \text{कोज्या अ, य ताय का मान}$... २९९—३००
२२६।	$\int_{0}^{\infty} \frac{\text{ज्याअ, य}}{य} \text{ताय, } \int_{0}^{\infty} \frac{\text{कोज्या अ, य}}{१ + य^२} \text{ताय}$ के मान	... ३००—३०१
२२७।	$\int_{0}^{\infty} \frac{\text{ज्यागय}}{य(१ + य^२)} \text{ताय का मान}$... ३०१
२२८।	कोज्या (∞), ज्या (∞) के मान	... ३०२—३०३
२२९।	सान्तचलानयन में विशेष	... ३०३—३०४
२३०।	२२९ वें प्रक्रम में विशेष	... ३०४
२३१।	२२९ वें प्रक्रम में दूसरा विशेष	... ३०४—३०५
२३२।	२३१ वें प्रक्रम में विशेष	... ३०५
२३३।	$\frac{१ - अ^२}{१ - २ \text{अकोज्याय} + अ^२}$ का मान श्रेढी में	... ३०५
२३४।	$\int_{0}^{\infty} \frac{१}{१ + य^२} \frac{\text{ताय}}{१ - २ \text{अकोज्यागय} + अ^२}$ का मान	... ३०५—३०६
२३५।	$\int_{0}^{\infty} \text{ला (१ - २अकोज्या गय + अ^२)} \frac{\text{ताय}}{१ + य^२}$ का मान	... ३०६
२३६।	$\int_{0}^{\infty} \frac{\text{य ज्यागय ताय}}{१ - २ \text{अकोज्यागय} + य^२}$ का मान	... ३०६
२३७।	टेलर के सिद्धान्त से सान्तचलानयन	... ३०६—३०७
२३८।	असम्भाज्यसंख्या से सान्तचलानयन	... ३०७—३०८
२३९।	दैर्घवृत्तीय चल से विशेष	... ३०८—३१०
२४०।	२३९ वें प्रक्रम में विशेष	... ३१०
२४१।	दैर्घवृत्तीय चल से और विशेष	... ३१०—३१२
२४२।	प्रथम और द्वितीय दैर्घवृत्तीय चल में संबन्ध	... ३१२—३१४
२४३।	प्रथम और तृतीय दैर्घवृत्तीयचल में संबन्ध	... ३१४

प्रक्रम	पृष्ठ
२४४। फ(य) का मध्यम मान सान्तचल से ...	३१४—३१६
२४५। लागा (१ + य) का मान जानने के लिये स्मरणी ...	३१६—३२२
२४६। मूलर के दूसरे चल में विशेष और अभ्यास के लिये प्रश्न ...	३२२—३३२

दशमाध्याय १० ।

२४७। क्रम को बदल कर चलानयन ...	३३३
२४८। २४७ प्रक्रम का एक और उदाहरण ...	३३३—३३४
२४९। $\int \int$ शानार ताय को च और श के रूप में बदलना ...	३३४—३३७
२५०। कुछ उदाहरण ...	३३७—३४१
२५१। द्विगुणचल का परिवर्तन क्षेत्रगीति से ...	३४१—३४३
२५२। त्रिगुणचल को नये तीन चल के रूप में बदलना ...	३४३—३४५
२५३। ऊपर के प्रक्रमों के कुछ उदाहरण ...	३४५—३४६
२५४। चलराशिकलन से त्रिकोणमितिफलों का श्रेढी में ले आना ...	३४६—३४८
२५५। २३३ वें प्रक्रम में विशेष ...	३४८—३५०
२५६। २५५ वें प्रक्रम में विशेष ...	३५०—३५१
२५७। ऊपर के प्रक्रमों के कुछ उदाहरण ...	३५१—३५५
२५८। २५६ वें प्रक्रम में विशेष ...	३५५
२५९। २५६ वें प्रक्रम में और विशेष ...	३५६
२६०। ज्या और कोटिज्या के रूप में एक श्रेढी बनाना जिस का योग ग के तुल्य हो ...	३५६—३५७
२६१। कोटिज्या के रूप में दूसरी श्रेढी जिसका योग निर्दिष्ट संख्या के तुल्य हो । और अभ्यास के लिये प्रश्न ...	३५७—३५८
२६२। चलनसमीकरण के लक्षण ...	३५८
२६३। $मा + \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = ०$ इसमें य, र का मान जानना ...	३५८—३६०
२६४। $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} + पार = वा$ में र का मान जानना ...	३६०—३६१

प्रक्रम		पृष्ठ
२६५।	२६४ वें प्रक्रम में विशेष	... ३६१
२६६।	चलनसमीकरण में विशेष	... ३६१—३६३
२६७।	चलनसमीकरण संबन्धि कुछ उदाहरण	... ३६३—३६८
२६८।	महत्तम और न्यूनतम में विशेष और वैशेषिककलन का लक्षण	... ३६८—३६९
२६९।	तावैर = वैतार को सिद्ध करना	... ३६९
२७०।	\int^n इस का अर्थ	... ३७०
२७१।	२६८-२७० प्रक्रमों में विशेष	... ३७०
२७२।	वै \int स वा \int वैस का मान जानना	... ३७०—३७२
२७३।	\int शाताय का वैशेषिक जानना	... ३७२—३७४
२७४।	स = फ(य, र, ल) इस में वैशा का मान जानना	... ३७४
२७५।	वैशेषिक पर से महत्तम और न्यूनतम मान	... ३७४—३८१
२७६।	साम्बन्धिक महत्तम और न्यूनतम, उनके कुछ उदाहरण और अभ्यास के लिये प्रश्न	... ३८१—३८९

इति विशेषवर्णन ।

विषयसूचिका (Contents)

अध्याय	पृष्ठ
१ चरगणिकलन का अभिप्राय और साधारण चलानयन	१—३४
२ अकरणीगत भिन्न संबन्ध का चलानयन (Rational Fractions)	... ३५—६५
३ लघूकरणपरम्परा (Formulae of Reduction)	... ६६—८५
४ प्रकीर्णक (Miscellaneous Remarks)	... ८६—१२०
५ द्विगुणचल (Double Integration)	... १२१—१३३
६ वक्रक्षेत्रों का चापानयन (Lengths of Curves)	... १३४—१७५
७ वक्र का फलानयन (Areas of Plane Curves)	... १७६—२२३
८ वक्र के पृष्ठ और घनफलानयन (Areas of Surfaces and volumes of solids)	... २२४—२६३
९ सान्तचलानयन (Definite Integrals)	... २६४—३३२
१० क्रमपरिवर्तन (Change of the variables in a multiple Integral)	... ३३३
११ वैशेषिकलन (The calculus of variations)	... ४१०—४४



पञ्चमाध्याय ।

दो वा अनेक चलराशियों के वश से चलानयन ।

वा द्विगुण चल ।

५८। पिछले अध्यायों में उन चलानयनों का वर्णन है जिन में एक ही चल है अर्थात् जब तात्कालिक सम्बन्ध $f(y)$ इस चाल का है तब इस के चलानयन का वर्णन हो चुका । परन्तु चलनकलन से जहाँ दो चलराशि वा अनेक चलराशि के फल हों वहाँ सिद्ध है कि

$$s = f(y, r) \text{ तो } \frac{\text{तास}}{\text{तायतार}} = \text{फा}(y, r) \text{ वा } s = f(y, r, l) \text{ तो}$$

$\frac{\text{तास}}{\text{तायतारताल}} = \text{फा}(y, r, l)$ इस लिये अब इस अध्याय का मुख्य उद्देश्य यह है कि $\text{फा}(y, r)$ वा $\text{फा}(y, r, l)$ परसे s के मान को लेआनेका नियम जानना ।

५९। चलनकलन के (६)वें अध्याय से प्रसिद्ध है कि

$$\frac{\text{तास}}{\text{तायतार}} = \frac{\text{ता}}{\text{ताय}} \left[\frac{\text{तास}}{\text{तार}} \right] = \frac{\text{तास}_2}{\text{ताय}} = \text{फा}(y, r)$$

इस लिये $s_2 = \int \text{फा}(y, r) \text{ताय}$ यह ठीक पिछले अध्यायों से सिद्ध हो जायगा यदि फल में r को स्थिर मान लो । मानो कि

$$\int \text{फा}(y, r) \text{ताय} = \text{फा}(y, r) \text{ इस लिये } \frac{\text{तास}}{\text{तार}} = \text{फा}(y, r)$$

∴ $s = \int \text{फा}(y, r) \text{तार}$ यह भी पिछले अध्यायों से प्रसिद्ध हो जायगा यदि इस में y को स्थिर मानो ।

यह भी विचारो तो जिस तरह से $\frac{\text{तास}}{\text{तायतार}}$ इस का मान चलनकलन से आता है ठीक उस के विपरीत क्रिया से यहाँ s आता है ।

$$६०। \text{ चलनकलन के (६)वें अध्याय से सिद्ध है कि } \frac{\text{तास}}{\text{तायतार}} = \frac{\text{तास}}{\text{तारताय}}$$

इस लिये

स = \int फा(य, र) तार = \int { \int फ(य, र) ताय ; तार वा, स = \int { फ(य, र) तार ; ताय }
 इस तरह से दो रीति स के जानने के लिये उत्पन्न होती है कि फ(य, र) में पहले र को स्थिर मान ताय के वश से चल ज्ञान करो फिर इस चल में य को स्थिर मान तार के वश से नया चल निकालो तो स का मान होगा । वा पहले य को स्थिर मान तार के वश से चल निकालो फिर इस में र को स्थिर मान ताय के वश से चल ज्ञान करो तो यही स का मान होगा ।

इस प्रकार से स का दो मान आया । कल्पना करो कि एक मान श, दूसरा श, है तो विपरीत क्रिया से

$$\frac{\text{ता श}_2}{\text{ताय तार}} = \text{फ (य, र)} = \frac{\text{ता श}}{\text{तार ताय}} \text{ अन्तर करने से}$$

$$0 = \frac{\text{ता श}_2}{\text{ताय तार}} - \frac{\text{ता श}}{\text{ताय तार}} = \frac{\text{ता}}{\text{ताय}} \left[\frac{\text{ता श}_2}{\text{तार}} - \frac{\text{ता श}}{\text{तार}} \right] = \frac{\text{ता}}{\text{ताय}} \left[\frac{\text{ता श}_2}{\text{तार}} \right]$$

यदि श₂—श = श₂ इस लिये $\frac{\text{ता श}_2}{\text{तार}}$ यह य का कोई फल नहीं हो सकता

सेवाय स्थिराङ्क के क्योंकि $\frac{\text{ता(स्थि)}}{\text{ताय}}$ यही शून्य के समान होता है इस

लिये $\frac{\text{ता श}_2}{\text{तार}} = \text{फि (र)} \therefore \text{श}_2 = \int \text{फि (र) तार} + \text{स्थि इस में भी स्थिराङ्क य का}$

कोई फल होगा क्योंकि फि (र) में य को स्थिर माना है । मानो कि स्थि = फी(य)

इस लिये श₂ = श₂—श = \int फि (र) तार + फी (य) = फा(र) + फी (य)

$$\text{यदि } \int \text{फि (र) तार} = \text{फा (र)}$$

इस से यह सिद्ध होता है कि दोनों विधियों से जो दो प्रकार के स उत्पन्न होते हैं उनका अन्तर दो फलों के योग तुल्य है जिन में एक केवल य का और दूसरा केवल र का फल है ।

६१ । पिछले प्रक्रम में जो स = \int { \int फ(य, र) ताय } तार यह है इस में यदि { } इस को उड़ा दें तो $\int \int$ फ(य, र) ताय तार ऐसा होगा । अब यदि $\int \int$ फ(य, र) ताय तार इस का अर्थ ऐसा समझें कि पहले ताय के वश से चल निकाल फिर तार के वश से निकाला है तो { } इस के देने का कुछ आवश्यक नहीं । इसी प्रकार $\int \int$ फ(य, र) तार ताय इस से यह समझो कि

पहले तार के वश से फिर ताय के वश से चल निकाला गया है। इसी तरह $\int \int \int f(y, r, l)$ तायतारताल इस से समझना चाहिये कि पहले ताय, तब तार, और फिर ताल के वश से चल का मान अपेक्षित है अर्थात् फल के पास जो ता रहे उस के वश से पहले फिर ज्यों ज्यों दूर में ता हैं कम से उन के वश से चल निकालना है।

मैंने लाघव के लिये बार-बार अनेक कोष्ठ न लिखकर यह संकेत मान लिया है इस में कुछ विशेष नहीं चाहे उलटेही रीति से तुम उसी अर्थ को प्रकाश कर सकते हो अर्थात् जो ता सब से दूर हो उसी के वश से पहले फिर यथासन्नो के वश से।

जैसे यदि $f(y, r) = अय^r + कर^y$ तो

$$\begin{aligned} \int \int f(y, r) \text{ ताय तार} &= \int \int (अय^r + कर^y) \text{ तायतार} \\ &= \int \left[\frac{अय^r}{r} + \frac{कर^y}{y} \right] \text{ तार} \\ &= \frac{अय^r}{r} + \frac{कर^y}{y} = \frac{य^r}{r} (अय + कर) \text{ यह पहला स का मान हुआ।} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{और } \int \int f(y, r) \text{ तार ताय} &= \int \int (अय^r + कर^y) \text{ तारताय} \\ &= \int \left[\frac{अय^r}{r} + \frac{कर^y}{y} \right] \text{ ताय} \\ &= \frac{अय^r}{r} + \frac{कर^y}{y} = \frac{य^r}{r} (अय + कर) \text{ यह दूसरा स हुआ।} \end{aligned}$$

यहाँ पर स्थिराङ्कों को छोड़ दिया है।

६२। जब साठवें प्रक्रम से सिद्ध है कि

$$\int \int f(y, r) \text{ तारताय} - \int \int f(y, r) \text{ तायतार} = फि(y) + फी(r)$$

इस लिये $\int \int f(y, r) \text{ तारताय} = \int \int f(y, r) \text{ तायतार} + फि(y) + फी(r)$ (१)

यहाँ यदि $\int f(y, r) \text{ ताय} = फा_1(y, r)$ और $\int f(y, r) \text{ तार} = फा_2(y, r)$

तो $\int \int f(y, r) \text{ ताय तार} = \int फा_1(y, r) \text{ तार} = फा_3(y, r)$

और $\int \int f(y, r) \text{ तारताय} = \int फा_2(y, r) \text{ ताय} = फा_4(y, r)$

इस लिये $\int_{ग}^घ \int_{अ}^क f(y, r) \text{ तारताय} = \int_{ग}^घ \{ फा_2(y, क) - फा_2(y, अ) \} \text{ ताय}$

वा $\int_{ग}^घ \int_{अ}^क f(y, r) \text{ तारताय} = \int_{ग}^घ फा_4(y, क) \text{ ताय} - \int_{ग}^घ फा_4(y, अ) \text{ ताय}$

$$= फा_3(घ, क) - फा_3(ग, क) - फा_3(घ, अ) + फा_3(ग, अ), \dots \dots \dots (२)$$

$$\begin{aligned} \text{इसी तरह } \int_{\text{अ}}^{\text{क}} \int_{\text{ग}}^{\text{घ}} \text{फ(य,र)} \text{ तायतार} &= \int_{\text{अ}}^{\text{क}} \{ \text{फा(घ,र)} - \text{फा(ग,र)} \} \text{ तार} \\ &= \int_{\text{अ}}^{\text{क}} \text{फा(घ,र)} \text{ तार} - \int_{\text{अ}}^{\text{क}} \text{फा(ग,र)} \text{ तार} \\ &= \text{फा}_२(\text{घ,क}) - \text{फा}_२(\text{घ,अ}) - \text{फा}_२(\text{ग,क}) + \text{फा}_२(\text{ग,अ}) \dots \dots \dots (३) \end{aligned}$$

परंतु (१) से

$$\text{फा}_३(\text{य,र}) = \text{फा}_२(\text{य,र}) + \text{फि(य)} + \text{फी(र)}$$

$$\text{इस लिये, फा}_३(\text{घ,क}) = \text{फा}_२(\text{घ,क}) + \text{फि(घ)} + \text{फी(क)}$$

$$\text{फा}_३(\text{ग,क}) = \text{फा}_२(\text{ग,क}) + \text{फि(ग)} + \text{फी(क)}$$

$$\text{फा}_३(\text{घ,अ}) = \text{फा}_२(\text{घ,अ}) + \text{फि(घ)} + \text{फी(अ)}$$

$$\text{फा}_३(\text{ग,अ}) = \text{फा}_२(\text{ग,अ}) + \text{फि(ग)} + \text{फी(अ)}$$

इन का उत्थापन (२) में देने से

$$\begin{aligned} \{ \text{फा}_३(\text{घ,क}) + \text{फा}_३(\text{ग,अ}) \} - \{ \text{फा}_३(\text{ग,क}) + \text{फा}_३(\text{घ,अ}) \} \\ = \{ \text{फा}_२(\text{घ,क}) + \text{फा}_२(\text{ग,अ}) \} - \{ \text{फा}_२(\text{घ,अ}) + \text{फा}_२(\text{ग,क}) \} \end{aligned}$$

अर्थात् (२) और (३) तुल्य हुए । इस लिये इस पर से

$$\int_{\text{ग}}^{\text{घ}} \int_{\text{अ}}^{\text{क}} \text{फ(य,र)} \text{ तार ताय} = \int_{\text{अ}}^{\text{क}} \int_{\text{ग}}^{\text{घ}} \text{फ(य,र)} \text{ तायतार}$$

यह सिद्ध हुआ ।

६३ । ऊपर के प्रक्रम से जो सिद्धान्त उत्पन्न हुआ उसे (२) प्रक्रम के ऐसा श्रेढी द्वारा भी प्रकाश कर सकते हैं ।

मानो फ(य,र) में य के मान, अ से लेकर क तक बीच में

अ, य_१, य_२, य_{त-१}, क हैं ।

जहाँ य_१—अ = च_१, य_२—य_१ = च_२ क—य_{त-१} = च_त ।

और र के मान ग से लेकर घ तक बीच में

ग, र_१, र_२, र_{म-१}, घ हैं

जहाँ र_१—ग = ज_१, र_२—र_१ = ज_२ घ—र_{म-१} = ज_म ।

अब यहाँ यह इच्छा है कि च_तज_मफ(य_{त-१}, र_{म-१}) इसमें द के स्थान में १, २, ३ म का और त के स्थान में १, २, ३, न का उत्थापन देने से जो श्रेढियाँ उत्पन्न होंगी उन का योग जानें । यहाँ न और म का मान अनन्त है ।

लाघव के लिये कल्पना करो कि श्रेढियों का कोई पद बनाने के लिये च ज फ(य,र) यह एक मुद्रा अर्थात् साँचा है जहाँ च, ज, और य, र के

स्थान में जिस पद का मान जानना होगा उस की संख्या रख देना होगा और $y_0 = अ$, $r_0 = ग$ ऐसा समझना । इस साँचे में च के स्थान में Δy और ज के स्थान में Δr को रख दें जैसा कि चलनकलन में प्रसिद्ध है तो साँचे का रूप $\Delta y \Delta r f(y, r)$ ऐसा होगा ।

जैसे किसी खेलौने के साँचे में मिट्टी, लोहा चाँदी, सोना इत्यादि के रखने से जितनी मूर्तियाँ वनेंगी सब के मोल और रंग में तो फ़र्क़ परन्तु रूप एकसा होगा इसी तरह इस साँचे से जितने पद वनेंगे सब के रंग और मोल अर्थात् मान तो भिन्न भिन्न परन्तु रूप एकसा होगा ।

साँचे में त के स्थान में १, द के स्थान में १, २, ३ म का उत्थापन देने से

$$च_1 \{ ज_1 f(अ, ग) + ज_2 f(अ, r_1) + ज_3 f(अ, r_2) + \dots + ज_m f(अ, r_{m-1}) \} \dots (१) \text{ श्रेणी}$$

त के स्थान में २ का और द के स्थान में १, २, . . . म का उत्थापन देने से

$$च_2 \{ ज_1 f(y_1, ग) + ज_2 f(y_1, r_1) + ज_3 f(y_1, r_2) + \dots + ज_m f(y_1, r_{m-1}) \} \dots (२) \text{ श्रेणी}$$

इसी तरह $च_3 \{ ज_1 f(y_2, ग) + ज_2 f(y_2, r_1) + ज_3 f(y_2, r_2) + \dots$

$$\vdots + ज_m f(y_2, r_{m-1}) \dots (३) \text{ श्रेणी}$$

$$च_{t+1} \{ ज_1 f(y_t, ग) + ज_2 f(y_t, r_1) + ज_3 f(y_t, r_2) + \dots$$

$$\vdots + ज_m f(y_t, r_{m-1}) \} \dots (t+1) \text{ श्रेणी}$$

$$च_n \{ ज_1 f(y_{n-1}, ग) + ज_2 f(y_{n-1}, r_1) + ज_3 f(y_{n-1}, r_2) + \dots$$

$$+ ज_m f(y_{n-1}, r_{m-1}) \} \dots (n) \text{ श्रेणी}$$

इन में यदि $m = \infty$ तो $\{ \}$ कोष्ठकान्तर्गत $(t+1)$ श्रेणी का योग (२) प्रक्रम से $\int_y^k f(y_t, r)$ तार यह होगा । कल्पना करो कि यह फा (y_t) के समान है तो त के स्थान में ०, १, २, $n-1$ का उत्थापन देने से क्रम से ऊपर के श्रेणियों का मान ।

$\left. \begin{array}{l} च_1 f(अ) \\ च_2 f(y_1) \\ च_3 f(y_2) \\ \vdots \\ च_n f(y_{n-1}) \end{array} \right\}$ इन का योग अब (२) ही प्रक्रम से सिद्ध है कि यदि $n = \infty$ तो $\int_अ^क f(य) ताय यह अर्थात् $\int_अ^क \int_ग^r f(य, र) तारताय यह होगा ।$
 इसी तरह यदि हर एक श्रेणियों का $\{ \}$ कोष्ठकान्तर्गत ऊर्ध्वाधर एक एक पदों का पहले योग करो तो$

$$\int_{\text{अ}}^{\text{क}} \text{फ}(य, ग) \text{ ताय} = \text{फ}_१(ग), \text{फ}_२(ग_२) \text{ इत्यादि होगा फिर सब पदों का योग}$$

$$\text{अर्थात् श्रेणियों का योग} = \int_{\text{अ}}^{\text{क}} \text{फ}_१(ग) + \int_{\text{अ}}^{\text{क}} \text{फ}_२(ग_२) + \int_{\text{अ}}^{\text{क}} \text{फ}_३(ग_३) + \dots$$

$$+ \int_{\text{अ}}^{\text{क}} \text{फ}_म(\text{ग}_{म-१}) = \int_{\text{अ}}^{\text{क}} \text{फ}_१(ग) \text{ तार} = \int_{\text{अ}}^{\text{क}} \int_{\text{अ}}^{\text{ब}} \text{फ}(य, र) \text{ तायतार}$$

परन्तु श्रेणियों के तिर्यक् पदों का योग कर वा ऊर्ध्वाधर पदों का योग कर फिर उन को जोड़ने से श्रेणियों का योग तो एक ही होगा इस लिये

$$\int_{\text{अ}}^{\text{क}} \int_{\text{अ}}^{\text{ब}} \text{फ}(य, र) \text{ तारताय} = \int_{\text{अ}}^{\text{ब}} \int_{\text{अ}}^{\text{क}} \text{फ}(य, र) \text{ तायतार यह सिद्ध हुआ ।}$$

६४। जब निश्चय है कि $\int \text{फ}(य, र) \text{ तार}$ इस में य स्थिर मान है तो

$$\int_{\text{अ}}^{\text{क}} \text{फ}_२(य) \text{ फ}(य, र) \text{ तार इस का भी मान जान सकते हैं फिर इस पर से}$$

$$\int_{\text{अ}}^{\text{क}} \int_{\text{अ}}^{\text{ब}} \text{फ}_२(य) \text{ फ}(य, र) \text{ तायतार इस का मान आजायगा ।}$$

यहाँ भी यदि (६३)वें प्रक्रम से श्रेणियों की परम्परा बनावोगे तो विशेष इतना ही होगा कि ग, र_१, र_२ इत्यादि प्रत्येक श्रेणियों में य के वश से भिन्न भिन्न होंगे जैसे (त + १) श्रेणी के { } अन्तर्गत

$$\int_{\text{अ}}^{\text{क}} \text{फ}(य, ग) + \int_{\text{अ}}^{\text{क}} \text{फ}(य, र_१) + \int_{\text{अ}}^{\text{क}} \text{फ}(य, र_२) + \dots + \int_{\text{अ}}^{\text{क}} \text{फ}(य, र_{म-१})$$

इन पदों में

$$ग = \text{फ}_१(य), \int_{\text{अ}}^{\text{क}} = र_१ - \text{फ}_१(य), \int_{\text{अ}}^{\text{क}} = र_२ - \text{फ}_१(य), \dots \dots \int_{\text{अ}}^{\text{क}} = \text{फ}_२(य) - \text{र}_{म-१}$$

पेसा मानना पड़ेगा फिर पूर्ववत् सिद्ध कर सकते हो कि इन पदों का योग

$$\int_{\text{अ}}^{\text{क}} \text{फ}_२(य) \text{ फ}(य, र) \text{ तार यही होगा ।}$$

$$\text{कल्पना करो कि } \int_{\text{अ}}^{\text{क}} \text{फ}_२(य) \text{ फ}(य, र) \text{ तार}$$

यह $\text{फ}_२(य)$ के समान है तो, त के स्थान में ०, १, २, ३, ४, ५, ६, ७, ८, ९, १०, ११, १२, १३, १४, १५, १६, १७, १८, १९, २०, २१, २२, २३, २४, २५, २६, २७, २८, २९, ३०, ३१, ३२, ३३, ३४, ३५, ३६, ३७, ३८, ३९, ४०, ४१, ४२, ४३, ४४, ४५, ४६, ४७, ४८, ४९, ५०, ५१, ५२, ५३, ५४, ५५, ५६, ५७, ५८, ५९, ६०, ६१, ६२, ६३, ६४, ६५, ६६, ६७, ६८, ६९, ७०, ७१, ७२, ७३, ७४, ७५, ७६, ७७, ७८, ७९, ८०, ८१, ८२, ८३, ८४, ८५, ८६, ८७, ८८, ८९, ९०, ९१, ९२, ९३, ९४, ९५, ९६, ९७, ९८, ९९, १०० का उत्थापन देने से

$$\int_{\text{अ}}^{\text{क}} \int_{\text{अ}}^{\text{ब}} \text{फ}_२(य) \text{ फ}(य, र) \text{ तारताय का भी मान जान जाओगे ।}$$

६५। यदि $\text{फ}(य, र) = \text{फ}_१(य) \times \text{फि}(र)$ तो तार के वश चलानयन से

$$\int \text{फ}_१(य) \times \text{फि}(र) \text{ तार} = \text{फ}_१(य) \int \text{फि}(र) \text{ तार} = \text{फ}_१(य) \text{फि}(र) + \text{फ}_१(य) \text{स्थि जहाँ}$$

\int फि(र)तार = फि_१(र) + स्थि इस लिये

$$\int_{ग}^घ फा(य) फि(र)तार = फा(य) \{ फि_१(घ) - फि_१(ग) \}$$

और \int फा(य) $\{ फि_१(घ) - फि_१(ग) \}$ ताय = $\{ फि_१(घ) - फि_१(ग) \} \int$ फा(य)ताय
= $\{ फि_१(घ) - फि_१(ग) \} \{ फा_१(य) + स्थि_१ \}$

यदि \int फा(य)ताय = फा_१(य) + स्थि_१

इस लिये

$$\int_{अ}^क \int_{ग}^घ फ(य) \times फि(र)तारताय = \{ फि_१(घ) - फि_१(ग) \} \{ फा_१(क) - फा_१(अ) \}$$

$$= \int_{ग}^घ फि(र)तार \times \int_{अ}^क फा(य)ताय$$

इस से यह सिद्ध होता है कि यदि अ, क, ग, घ स्थिराङ्क हों अर्थात् य, वा र का कोई फल न हों तो

$$\int_{अ}^क \int_{ग}^घ फा(य) \times फि(र)तारताय = \int_{अ}^क फा(य)ताय \times \int_{ग}^घ फि(र)तार$$
 ऐसा होगा ।

६६। इसी तरह जहाँ तीन चलराशि के वश से

$$\int_{अ}^क \int_{ग}^घ \int_{त}^थ फ(य, र, ल)तालतारताय$$
 ऐसा स्वरूप हो वहाँ यह समझना चाहिये

कि पहले र, य को स्थिर मान ताल के वश से त, थ के भीतर सान्तचल निकाला गया फिर इस में य, ल को स्थिर मान, तार के वश से ग, घ के भीतर सान्तचल का मान निकाला गया फिर इस का ताय के वश से अ, क के भीतर सान्तचल का मान निकाला गया है । इसे त्रिगुणचल कहते हैं ।

६३प्रक्रम से फ(य, र, ल) Δ ल Δ र Δ य Δ इस साँचे से जो श्रेढियाँ बनेंगी उन का (२)प्रक्रम से यदि योग करो तो वह

$$\int_{अ}^क \int_{ग}^घ \int_{त}^थ फ(य, र, ल)तालतारताय$$
 इसी के समान होगा ।

विद्यार्थियों को चाहिये कि श्रेढियों का रूप फैला कर उनके योग पर से परस्पर सब की तुलना कर अपना मन भरलें ।

यहाँ पूर्व युक्ति से प्रसिद्ध है कि थ, और त य, र के फल, घ और ग केवल य के फल हो सकते हैं परन्तु क और अ सर्वदा स्थिराङ्क ही रहेंगे ।

६७। इस प्रक्रम में कुछ उदाहरण दिखलाते हैं ।

(१) $\int \int (य^२ + र + र^३)तायतार$ इसका क्या मान होगा ।

$$\text{यहाँ } f(y, r) = y^2 + r + r^2$$

इस लिये $\int f(y, r)$ ताय = $y \left(\frac{y^2}{3} + r + r^2 \right)$ र को स्थिर मानने से

$$\text{फिर } \int \int f(y, r) \text{ तायतार} = \int y \left(\frac{y^2}{3} + r + r^2 \right) \text{ तार} = y \left[\frac{y^3}{3} + \frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3} \right]$$

यको स्थिर मानने से .

$$\text{इस लिये स} = \frac{y^3 r}{3} + \frac{r^2 y}{2} + \frac{r^3 y}{3}$$

यहाँ यदि $\int \int f(y, r) \text{ तारताय}$ इसका मान जानना हो तो पहले

$$\int f(y, r) \text{ तार} = \int (y^2 + r + r^2) \text{ तार} = y^2 r + \frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3}, \text{ यको स्थिर मानने से फिर}$$

$$\int \int f(y, r) \text{ तारताय}$$

$$= \int \left[\left(y^2 r + \frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3} \right) \text{ ताय} = \frac{y^3 r}{3} + \frac{r^2 y}{2} + \frac{r^3 y}{3} \text{ यह दूसरा स}$$

हुआ । दोनों स्थानों में स्थिराङ्क छोड़ दिया है । स्थिराङ्क लेने से पहले

$$\int f(y, r) \text{ ताय} = \int (y^2 + r + r^2) \text{ ताय} = \frac{y^3}{3} + r y + r^2 y + \text{स्थि}$$

$$\text{फिर } \int \int f(y, r) \text{ तायतार} = \int \left(\frac{y^3}{3} + r y + r^2 y + \text{स्थि} \right) \text{ तार}$$

$$= \frac{y^3 r}{3} + \frac{r^2 y}{2} + \frac{r^3 y}{3} + \text{स्थि} r + \text{स्थि} y = \frac{y^3 r}{3} + \frac{r^2 y}{2} + \frac{r^3 y}{3} + \text{फी} (r)$$

यह स का मान हुआ ।

$$\text{फिर } \int f(y, r) \text{ तार} = \int (y^2 + r + r^2) \text{ तार} = y^2 r + \frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3} - \text{स्थि}_2$$

$$\text{और } \int \int f(y, r) \text{ तारताय} = \int \left(y^2 r + \frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3} - \text{स्थि}_2 \right) \text{ ताय}$$

$$= \frac{y^3 r}{3} + \frac{r^2 y}{2} + \frac{r^3 y}{3} - \text{स्थि}_2 y - \text{स्थि}_2 = \frac{y^3 r}{3} + \frac{r^2 y}{2} + \frac{r^3 y}{3} - \text{फा} (y)$$

इस लिये दोनों स का अन्तर फी (r) + फा(y) यह हुआ ।

(२) $\int \int f(y, r) \text{ तारताय}$ इस का क्या मान होगा ।

यदि $f(y, r) = \text{ज्यायर}$

$$\text{यहाँ } \int f(y, r) \text{ तार} = \int \text{ज्यायर तार} = - \frac{\text{कोज्यायर}}{y}$$

$$\begin{aligned} \text{और } \int \int f(y,r) \text{ तार ताय} &= - \int \frac{\text{कोज्या}(y)r \text{ ताय}}{y} \\ &= - \int \frac{\text{कोज्या}y r \text{ ताय}}{y r} = - \int \frac{\text{कोज्या}l \text{ ताल}}{l}, \text{ यदि } l = yr, \end{aligned}$$

परन्तु

$$\frac{\text{कोज्या}l}{l} = \frac{1 - \frac{l^2}{2} + \frac{l^4}{24} - \frac{l^6}{720} + \dots}{l} = \frac{1}{l} - \frac{l}{2} + \frac{l^3}{24} - \frac{l^5}{720} + \dots$$

इस लिये

$$\begin{aligned} - \int \frac{\text{कोज्या}l \text{ ताल}}{l} &= - \int \frac{\text{कोज्या}y r \text{ ताय}}{y r} = \text{ला}l + \frac{l^3}{2 \cdot 2} - \frac{l^5}{4 \cdot 24} + \frac{l^7}{6 \cdot 720} - \dots \\ &= - \text{ला}y r + \frac{y^3 r^3}{2 \cdot 2} - \frac{y^5 r^5}{4 \cdot 24} + \frac{y^7 r^7}{6 \cdot 720} - \dots, \text{ यही उत्तर हुआ ।} \end{aligned}$$

(३) (२) उदाहरण में $\int_0^k \int_0^y f(y,r) \text{ तार ताय}$ का क्या मान होगा ।

$$(२) \text{ उदाहरण से } \int f(y,r) \text{ तार} = - \frac{\text{कोज्या}y r}{y}$$

$$\text{इस लिये } \int_0^y f(y,r) \text{ तार} = - \frac{\text{कोज्या}y}{y} + \frac{1}{y}$$

$$\begin{aligned} \text{और } \frac{1}{y} - \frac{\text{कोज्या}y}{y} &= - \frac{1}{y} + \frac{y}{2} - \frac{y^3}{24} + \dots + \frac{1}{y} \\ &= \frac{y}{2} - \frac{y^3}{24} + \frac{y^5}{720} - \frac{y^7}{5040} + \dots \end{aligned}$$

$$\text{इस लिये } \int_0^k \int_0^y f(y,r) \text{ तार ताय} = \frac{y^2}{2 \cdot 2} - \frac{y^4}{4 \cdot 24} + \frac{y^6}{6 \cdot 720} - \frac{y^8}{8 \cdot 5040} + \dots$$

$$\text{और } \int_0^k \int_0^y f(y,r) \text{ तार ताय} = \frac{k^2 - a^2}{2 \cdot 2} - \frac{k^4 - a^4}{4 \cdot 24} + \frac{k^6 - a^6}{6 \cdot 720} - \frac{k^8 - a^8}{8 \cdot 5040} + \dots$$

यही उत्तर हुआ ।

(४) $\int_0^a \int_0^y \int_0^{y+r} \int_0^{y+r+l} \text{ ताल तार ताय}$ इस का मान जानना चाहिये ।

यहाँ $\int_0^{y+r+l} \text{ ताल} = \int_0^{y+r+l} 1 \text{ ताल} = y+r+l$, और r को स्थिर मानने से

$$\text{इस लिये } \int_0^{y+r} \int_0^{y+r+l} \text{ ताल} = \int_0^{y+r} (2y+2r) - \int_0^{y+r} 1 \text{ तार}$$

$$\int_0^a \int_0^y \int_0^{y+r} \int_0^{y+r+l} \text{ ताल तार} = \int_0^a \int_0^y (2y+2r) \text{ तार} - \int_0^a \int_0^y 1 \text{ तार}$$

$$= \frac{e^{2y+2r}}{2} - e^{y+r} \text{ इस लिये}$$

$$\int_0^y \int_0^{y+r} e^{y+r+l} \text{ तालतार} = \frac{e^{2y}}{2} - \frac{e^{2y}}{2} - e^{2y} + e^{2y} = \frac{e^{2y}}{2} - 2e^{2y} + e^{2y}$$

$$\text{और } \int_0^y \int_0^y \int_0^{y+r} e^{y+r+l} \text{ तालतारताय} = \frac{e^{2y}}{2} - \frac{2e^{2y}}{4} + e^{2y}$$

इस लिये

$$\int_0^a \int_0^y \int_0^{y+r} e^{y+r+l} \text{ तालतारताय} = \frac{e^{2a}}{2} - \frac{1}{2} - 2e^{2a} + \frac{3}{2} + e^{2a} - 1$$

$$= \frac{e^{2a}}{2} - 2e^{2a} + e^{2a} - \frac{3}{2} \text{ यही उत्तर हुआ ।}$$

$$(५) \text{ यदि } f(y,r) = (y^2 + y)(r^2 + r)$$

तो $\int_a^k \int_g^b f(y,r) \text{ तारताय}$ इस का क्या मान होगा ।

$$\text{यहाँ } \int f(y,r) \text{ तार} = (y^2 + y) \left[\frac{r^3}{3} + \frac{r^2}{2} \right]$$

$$\therefore \int_a^b f(y,r) \text{ तार} = (y^2 + y) \left[\frac{b^3 - a^3}{3} + \frac{b^2 - a^2}{2} \right]$$

$$\text{फिर } \int_a^k \int_g^b f(y,r) \text{ तारताय} = \left[\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} \right] \left[\frac{b^3 - a^3}{3} + \frac{b^2 - a^2}{2} \right]$$

$$\text{इस लिये } \int_a^k \int_g^b f(y,r) \text{ तारताय}$$

$$= \left[\frac{k^3 - a^3}{3} + \frac{k^2 - a^2}{2} \right] \left[\frac{b^3 - a^3}{3} + \frac{b^2 - a^2}{2} \right] \text{ यह}$$

$$\int_a^k (y^2 + y) \text{ ताय} \times \int_g^b (r^2 + r) \text{ तार इस के तुल्य होता है ।}$$

अभ्यास के लिये प्रश्न ।

$$१। \frac{\int_a^b (x - ky) \text{ ताय}}{\sqrt{(a+y\sqrt{g-ky^2})(kx^2+y\sqrt{g-ax})}} \text{ इस का मान क्या होगा ।}$$

यहाँ $r = \frac{a}{b} + k$ कय कल्पना करो तो चल का मान कोज्या^{-१} $\frac{r}{\sqrt{(a+kb)}}$

२। $\int \frac{2(m^2-1) \operatorname{स्पयताय}}{1+m^2 \operatorname{स्पय}} dx$ इस का क्या मान होगा ।

उ० ला (कोज्या^२य + म^२ज्या^२य)

३। सिद्ध करो कि $\int \frac{\operatorname{ताय}}{y^{n+1} \sqrt{1+(\frac{a}{y})^{2n}}} = \frac{1}{n a^n} \operatorname{ला} \frac{y^n}{a^n + \sqrt{a^{2n} + y^{2n}}}$

४। सिद्ध करो कि $\int \frac{1-\operatorname{स्पय}}{1+\operatorname{स्पय}} \operatorname{ताय} = \operatorname{ला} \operatorname{ज्या} (\frac{\pi}{4} + y) - y$

५। सिद्ध करो कि $\int \frac{y^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(a^2-y^2)}} = \operatorname{ज्या}^{-1} \frac{y^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{मानो कि } r = y^{\frac{3}{2}})$

६। सिद्ध करो कि

$$\int \frac{4a^3 \operatorname{ताय}}{y^2 + a^2 y^2 + a^4} = \operatorname{ला} \frac{y^2 + ay + a^2}{y^2 - ay + a^2} + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{स्प}^{-1} \frac{y a \sqrt{3}}{a^2 - y^2}$$

७। सिद्ध करो कि यदि $\phi = \frac{\pi}{n}$ और $n = \infty$ तो

$$\{ \operatorname{ज्या}\phi \operatorname{ज्या} 2\phi \operatorname{ज्या} 3\phi \dots \operatorname{ज्या}\phi (n-1) \}^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

८। सिद्ध करो कि यदि $\phi = \frac{\pi}{n}$ और $n = \text{अनन्त}$ तो

$$\{ \operatorname{स्प}\phi \operatorname{स्प} 2\phi \operatorname{स्प} 3\phi \dots \operatorname{स्प}\phi (n-1) \}^{\frac{1}{n}} = 1$$

९। सिद्ध करो कि यदि $\phi = \frac{\pi}{n}$ और $n = \infty$ तो

$$\begin{aligned} & \operatorname{कोज्या}\phi \operatorname{कोज्या} 2\phi \operatorname{कोज्या} 3\phi \dots \operatorname{कोज्या}\phi (n-1) \\ & = \operatorname{ज्या}\phi \operatorname{ज्या} 2\phi \operatorname{ज्या} 3\phi \dots \operatorname{ज्या}\phi (n-1) \end{aligned}$$

१०। सिद्ध करो कि यदि $f(y, r) = y r \operatorname{कोज्या} y r$ तो यदि स्थिराङ्क को छोड़ दें तो $f(y, r) - \int \int f(y, r) \operatorname{तारताय} = \operatorname{कोज्या} y r (y r + 1)$

११। सिद्ध करो कि यदि $\int_k^a f(y) \operatorname{ताय} = 1$ और $f(y)$ सर्वदा धन हो तो

$$\left\{ \int_k^a f(y) \operatorname{कोज्या} y \operatorname{ताय} \right\}^2 + \left\{ \int_k^a f(y) \operatorname{ज्या} y \operatorname{ताय} \right\}^2 \leq 1$$

यहाँ (२) प्रक्रम और (४०) वें प्रक्रम से पहले सिद्ध करो कि

$$\int_k^a f(y) \operatorname{ताय} = (a-k) f \left\{ k + \frac{a-k}{2} \right\} = 1$$

इस लिये $\int_k^a \{ f(y) \}^2 \operatorname{ताय} = \int_k^a f(y) f(y) \operatorname{ताय} =$

$$= \int_k^a \{ k + p(a-x) \} \int_k^a f(x) dx = \int_k^a \{ k + p(a-x) \} dx$$

$$\text{और } \int_k^a \text{कोज्यागयताय} = \int_k^a \text{कोज्यागयतायग}$$

$$= \int_k^a \left\{ \frac{a-x}{2} + \frac{\text{ज्यारअग-ज्यारकग}}{4} \right\} dx$$

(क्योंकि $\int_k^a \text{कोज्यागयतायग} = \frac{\text{यग}}{2} + \frac{\text{ज्यारगय}}{4}$) इस लिये

$$\int_k^a \{ f(x) \}^2 dx \times \int_k^a \text{कोज्यागयताय}$$

$$= \int_k^a \{ k + p(a-x) \} \left\{ \frac{a-x}{2} + \frac{\text{ज्यारअग-ज्यारकग}}{4} \right\} dx$$

यह $\int_k^a \{ f(x) \}^2 dx$ कोज्यागयताय है इस से बड़ा होगा (४ अध्याय के १९ वें प्रश्न में)

$$\text{इसी तरह } \int_k^a \text{ज्यागयताय} = \int_k^a \text{ज्यागयतायग} = \frac{\text{यग}}{2} - \frac{\text{ज्यारगय}}{4}$$

$$\text{इस लिये } \int_k^a \text{ज्यागयताय} = \frac{2}{3} \left\{ \frac{\text{अग-कग}}{2} - \frac{\text{ज्यारअग-ज्यारकग}}{4} \right\}$$

$$\text{इस लिये } \int_k^a \{ f(x) \}^2 dx \times \int_k^a \text{ज्यागयताय}$$

$$\int_k^a \{ k + p(a-x) \} \left\{ \frac{\text{अ-क}}{2} - \frac{\text{ज्यारअग-ज्यारकग}}{4} \right\} dx$$

$$\text{यह बड़ा होगा } \left\{ \int_k^a \{ f(x) \}^2 dx \right\}^2 \text{ इस से।}$$

और तब दोनों का योग $\int_k^a \{ k + p(a-x) \} \{ a-x \} dx = 1$ यह बड़ा होगा $\left\{ \int_k^a \{ f(x) \}^2 dx \right\} + \left\{ \int_k^a \{ f(x) \}^2 dx \right\}^2$ इस से।

१२। सिद्ध करो कि यदि $\int_k^a f(x) dx = 1$ और $f(x)$ सर्वदा धन हो तो

$$\int_k^a \{ f(x) \}^2 dx > \int_k^a f(x) dx$$

६८। चलराशिकलन अब समाप्त हो गया। पिछले अध्यायों में जो अनेक सिद्धान्त और उदाहरण दिखला आये हैं उन्हीं का प्रपञ्च सब अगले अध्यायों में है।

जैसे व्यक्तगणित में परिकर्माष्टक और बीजगणित में वर्गप्रकृति पर्यन्त गणित मुख्य है आगे सब दोनों गणितों में इन्हीं का सर्वत्र प्रपञ्च है इसी तरह यहाँ भी आगे सर्वत्र पिछले सिद्धान्तों का ही प्रपञ्च है इस लिये विद्यार्थियों को चाहिये कि इन पाँचों अध्यायों में जो कुछ लिखा गया है उन का अच्छी तरह से ध्यान देकर अभ्यास करें बिना उन के जाने अगले अध्यायों का ज्ञान होना अत्यन्त दुर्घट है ।

इति पञ्चमाध्याय ।

षष्ठाध्याय

वक्रक्षेत्रों का चापानयन ।

६९। चलनकलन के १६वें अध्याय से सिद्ध है कि यदि किसी वक्र का

$$r = f(y) \text{ ऐसा समीकरण हो तो } \frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} = \sqrt{1 + \frac{\text{तार}^2}{\text{ताय}^2}} \text{ ऐसा होगा}$$

इस लिये ताचा = $\sqrt{\text{ताय}^2 + \text{तार}^2}$ । यहाँ पर वक्र के समीकरण पर से ताचा का मान फा(य) ताय ऐसा होगा फिर पिछले अध्यायों के बल से $\int \text{ताचा} = \text{चा} + \text{स्थि} = \int \text{ताय} \sqrt{1 + \frac{\text{तार}^2}{\text{ताय}^2}} = \int \sqrt{\text{ताय}^2 + \text{तार}^2} = \int \text{तायफा}(y)$ यह सिद्ध हो जायगा ।

$$\text{चा} + \text{स्थि} = \int \text{ताय} \sqrt{1 + \frac{\text{तार}^2}{\text{ताय}^2}} \text{ इस लिये कल्पना करो कि}$$

जब $y = y_1$ तब चा = चा_१ और जब $y = y_2$ तब चा = चा_२

$$\text{इस लिये चा}_2 - \text{चा}_1 = \int_{y_1}^{y_2} \text{ताय} \sqrt{1 + \frac{\text{तार}^2}{\text{ताय}^2}}$$

इस लिये दो कोटियों के बीच में वक्र का जो चाप है उसके जानने के लिये स्थिराङ्क का कुछ भी प्रयोजन नहीं केवल y_1 और y_2 जो उन दो कोटियों के भुज हों उन के बीच $\int \text{ताय} \sqrt{1 + \frac{\text{तार}^2}{\text{ताय}^2}}$ इस का मान ले आना चाहिये ।

७०। जिस परवलय (Parabola) का $r^2 = ४ay$ यह समीकरण है उसके चाप का प्रमाण जानना है ।

$$\text{यहाँ } r^2 = ४ay \therefore \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{२a}{r} \text{ और } 1 + \frac{\text{तार}^2}{\text{ताय}^2} = \frac{r^2 + ४a^2}{r^2} = \frac{४ay + ४a^2}{४ay}$$

$$= \frac{y+a}{y} \text{ इस लिये } \int \left[\frac{y+a}{y} \right]^{\frac{१}{२}} \text{ताय} = \int \frac{y+a}{\sqrt{y^2+ay}}$$

$$= \int \frac{y + \frac{a}{२}}{\sqrt{y^2+ay}} \text{ताय} + \int \frac{\frac{a}{२}\text{ताय}}{\sqrt{y^2+ay}} = \sqrt{y^2+ay} + \frac{a}{२} \log(y + \frac{a}{२} + \sqrt{y^2+ay})$$

(९)वें प्रक्रम के (३) उदाहरण से ।

$$\text{इस लिये चा} + \text{स्थि} = \sqrt{y^2+ay} + \frac{a}{२} \log(y + \frac{a}{२} + \sqrt{y^2+ay}) \dots \dots (१)$$

इस में यदि $y = ०$ तो क्षेत्र लक्षण से चा = ०

इस लिये स्थि = $\frac{a}{r}$ ला ($\frac{a}{r}$)

इस का उत्थापन (१) में देने से

$$\begin{aligned} \text{परवलय का चाप} &= \sqrt{y^2 + ay} + \frac{a}{r} \text{ ला } (y + \frac{a}{r} + \sqrt{y^2 + ay}) - \frac{a}{r} \text{ ला } \frac{a}{r} \\ &= \sqrt{y^2 + ay} + \frac{a}{r} \text{ ला } \left[\frac{2y + a + 2\sqrt{y^2 + ay}}{a} \right] \end{aligned}$$

इस में यदि $y = a$ तो नाभी से जो लम्ब y अक्ष पर होगा वह एक भाग में जहाँ परवलय को काटेगा वहाँ से शिरः स्थान तक का चाप मान $a\sqrt{2} + \frac{a}{r} \text{ ला } \left[\frac{3a + 2\sqrt{2a^2}}{a} \right] = a\sqrt{2} + \frac{a}{r} \text{ ला } (3 + 2\sqrt{2})$ यह हुआ

७१। चक्रालद का चापानयन (चलनकलन में २८६ प्रक्रम का ११वाँ वक्र देखो)

इस में $\frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} = \sqrt{\frac{r^2 - y^2}{y}}$ (चलनकलन का ३८८ पृष्ठ देखो)

$$\text{इस लिये } \int \frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} = \text{चा} = (2k)^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} \text{ ताय} = 2(2k)^{\frac{1}{2}} (y)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2ky}$$

यहाँ क्षेत्रलक्षण से जब $y = 0$ तब $\text{चा} = 0$ इस लिये स्थिराङ्क का मान शून्य होगा।

७२। जिस वक्र कार = $\frac{m}{n}$ यह समीकरण है उसके चाप का आनयन ।

$$r = \text{अय } \frac{m}{n} \therefore \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{m}{n} \text{ अय } \frac{m}{n} - 1$$

$$\text{और } \sqrt{\frac{\text{तार}^2}{\text{ताय}^2} + 1} = \sqrt{1 + \frac{m^2 a^2}{n^2} \text{ य } \frac{2m - 2n}{n}}$$

$$\text{अब } \int \text{ताय} \sqrt{1 + \frac{m^2 a^2}{n^2} \text{ य } \frac{2m - 2n}{n}} \text{ इस का मान १२वें प्रक्रम के (४)}$$

उदाहरण में यदि $\frac{p}{q} = \frac{1}{2}$ । $m = 1$, $n = \frac{2m - 2n}{n}$ मानो तो

$$\frac{m}{n} = \frac{n}{2(m-n)} \text{ यह यदि अभिन्न और धन हो तो विहित हो जायगा ।}$$

अथवा $\frac{n}{2(m-n)} + \frac{1}{2}$ यह अभिन्न और ऋण हो तो भी उसी उदाहरण से

चल का मान विदित हो जायगा । यदि पहला ऋण अभिन्न दूसरा धन अभिन्न हो तो भी द्वितीयाध्याय से चल का मान विदित हो जायगा ।

$$\text{जैसे यदि } \frac{m}{n} = \frac{3}{2} \text{ तो } \frac{m-n}{n} = \frac{1}{2} \therefore \frac{n}{2(m-n)} = 1 \text{ अभिन्न}$$

$$\text{इस लिये } \sqrt{1 + \frac{\text{तार}^2}{\text{ताय}^2}} = \sqrt{1 + \frac{9a^2}{4}} \text{ य } = \frac{3a}{2} \sqrt{\frac{4}{9a^2} + 1}$$

$$\text{इस लिये } \int \text{ताचा} = \text{चा} + \text{स्थि} = \frac{3a}{2} \int \left[\frac{4}{9a^2} + 1 \right]^{\frac{1}{2}} \text{ताय} = a \left[\frac{4}{9a^2} + 1 \right]^{\frac{3}{2}}$$

इस में यदि $y = 0$ तो क्षेत्रलक्षण से $\text{चा} = 0$ इस लिये

$$\text{स्थि} = a \times \frac{4}{2 \cdot 9a^2} = \frac{2}{9a} \text{ इस का उत्थापन देने से}$$

$$\text{चा} = \left\{ \left[\frac{4}{9a^2} + 1 \right]^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{9a} \right\}$$

७३। कातन्वली (Catenary) के चाप का आनयन ।

$$\text{इस में } r = \frac{g}{2} \left(\frac{y}{g} + \frac{-y}{g} \right) \text{ इस लिये } \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{1}{2} \left(\frac{y}{g} - \frac{-y}{g} \right)$$

$$\text{और } \sqrt{1 + \frac{\text{तार}^2}{\text{ताय}^2}} = \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{2y}{g} + \frac{2y}{g} + 2 \right)} = \frac{1}{2} \left(\frac{y}{g} + \frac{-y}{g} \right)$$

$$\text{इसलिये } \int \text{ताय} \sqrt{1 + \frac{\text{तार}^2}{\text{ताय}^2}} = \text{चा} + \text{स्थि} = \frac{g}{2} \left(\frac{y}{g} - \frac{-y}{g} \right)$$

यदि मूल बिन्दु से कणना करें जहाँ $y = 0$ तो यहाँ स्थिराङ्क शून्य होगा ।

७४। जिस वक्र का $y^{\frac{2}{3}} + r^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ यह समीकरण है उस के चाप का आनयन ।

$$\text{यहाँ } \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = -\frac{r^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}} \text{ इस लिये } \frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} = \left[\frac{y^{\frac{2}{3}} + r^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{2}{3}}} \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}}$$

$$\text{इस लिये } \text{च} = a^{\frac{1}{3}} \int \text{ताय} y^{-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} a^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}} + \text{स्थि}$$

यहाँ $y = 0$ उस बिन्दु से यदि गणना करें तो स्थिराङ्क शून्य होगा ।

चलितवृत्त का व्यासार्द्ध यदि स्थिरवृत्त के व्यासार्द्ध का चतुर्थांश हो तो इस वक्र को एक प्रकार का अतिचक्रालद कहते हैं । (चलनकलन में २८६ प्रक्रम का १३ वाँ वक्र देखो) ।

७५। ६९ वें प्रक्रम से यह भी कह सकते हो कि यदि r के वश से तात्कालिक सम्बन्ध का ज्ञान करें तो $\frac{\text{ताचा}}{\text{तार}} = \sqrt{1 + \frac{\text{ताय}^2}{\text{तार}^2}}$ ऐसा होगा । इसलिये

$$\text{चा} = \int \text{तार} \sqrt{1 + \frac{\text{ताय}^2}{\text{तार}^2}} + \text{स्थि} \dots \dots \dots (१)$$

इसी तरह यदि y और r तीसरे चलराशि का फल हों तो चलनकलन के १५३ वें प्रक्रम के (३) समीकरण से

$$\int \text{ताचा} = \text{चा} = \int \sqrt{\left[\frac{\text{ताय}^2}{\text{ताका}^2} + \frac{\text{तार}^2}{\text{ताका}^2} \right]} \text{ताका} + \text{स्थि} \dots \dots (२)$$

ऐसे ही चलनकलन के १५५ वें प्रक्रम से यदि अक्षीय भुज युग्म हों तो

$$\text{चा} = \int \left[\text{श्रु}^2 + \frac{\text{ताश्रु}^2}{\text{ताष}^2} \right]^{\frac{1}{2}} \text{ताष} + \text{स्थि} \dots \dots \dots (३)$$

$$\text{वा चा} = \int \left[1 + \text{श्रु}^2 \frac{\text{ताष}^2}{\text{ताश्रु}^2} \right]^{\frac{1}{2}} \text{ताश्रु} + \text{स्थि} \dots \dots \dots (४)$$

अथवा यदि $\text{स्प भ} = \frac{\text{ताष}}{\text{ताश्रु}}$ जहाँ भ , श्रुति और स्पर्शरेखा से उत्पन्न कोण का मान है तो

$$\left. \begin{aligned} \frac{\text{ताचा}}{\text{ताष}} &= \frac{\text{श्रु}}{\text{ज्याभ}} \text{ इस लिये चा} = \int \frac{\text{श्रु}}{\text{ज्याभ}} \text{ताष} + \text{स्थि} \\ \text{और } \frac{\text{ताचा}}{\text{ताश्रु}} &= \frac{1}{\text{कोज्याभ}}, \text{ इसलिये चा} = \int \frac{\text{ताश्रु}}{\text{कोज्याभ}} + \text{स्थि} \end{aligned} \right\} \dots \dots (५)$$

चलनकलन के १३१ वें प्रक्रम से $\text{ज्याभ} = \frac{\text{ल}}{\text{श्रु}}$, और $\text{कोज्याभ} = \frac{\sqrt{\text{श्रु}^2 - \text{ल}^2}}{\text{श्रु}}$

इन का उत्थापन (५) वें में देने से

$$\text{चा} = \int \frac{\text{श्रु}^2 \text{ताष}}{\text{ल}} + \text{स्थि}, \text{ और चा} = \int \frac{\text{श्रुताश्रु}}{\sqrt{\text{श्रु}^2 - \text{ल}^2}} + \text{स्थि} \dots \dots (६)$$

यहाँ भ्रुवविन्दु से स्पर्शरेखा पर पड़े लम्ब का मान ल है ।

(चलनकलन का १४ वाँ अध्याय देखो)

इन सब पर से जहाँ जिस प्रकार से चलानयन में लाघव देख पड़े वहाँ उस प्रकार से चाप का मान निकालो ।

जिन प्रकारों में मूल लेने से ताचा का मान आता है वहाँ बीजगणित से स्पष्ट है कि एक ताचा का मान धन और दूसरा ऋण होगा इस लिये बुद्धिमानों को

चाहिये कि प्रश्न के अनुसार जहाँ जिस का प्रयोजन हो उसका ग्रहण करें जैसे ७३ वें प्रक्रम में कातन्वली के चापानयन में जो $\frac{2y}{r} \left(\sqrt{r^2 + k^2} + \sqrt{r^2 - k^2} + 2 \right)$ इस का मूल लिया है वह धन माना है इस पर से जो चाप का मान आता है वह भी धन आता है अर्थात् मूलविन्दु से य अक्ष में दहनी और यदि य का मान धन मानो तो र अक्ष से दहने भाग में जो वक्र का भाग है उस के चाप का मान वह है। और इसी में यदि मूल कृण मानो तो चाप का मान पूर्व ही के तुल्य क्रण आवेगा ऐसी दशा में य, अक्ष में मूल विन्दु से वाम भाग में य और र अक्ष से वाम भाग में जो वक्र खण्ड है उसके चाप का मान समझना चाहिये। (चलकलन में २८६ प्रक्रम का १३ वाँ वक्र देखो)।

७६। लाघुरिकथिक वक्र के चाप का आनयन ।

यहाँ वक्र का समीकरण $r = a \sqrt{k^2 - y^2}$ (चलनक०, २८६ प्र०, १ वक्र)

$$\text{इस लिये } \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{a}{k} \sqrt{\frac{y}{k}} = \frac{r}{k} \therefore \frac{\sqrt{r^2 + k^2}}{k} = \sqrt{1 + \frac{\text{तार}^2}{\text{ताय}^2}}$$

और चा = $\frac{1}{k} \int \sqrt{(r^2 + k^2)} \text{ ताय देखो यहाँ फल में } r \text{ का मान है और चल ताय के वश से निकालना है इस लिये } r \text{ के स्थान में जब तक कोई तत्तुल्य य के फल का उत्थापन न दोगे तब तक चलज्ञान कठिन है। इस लिये यहाँ ७५ प्रक्रम के (१) समीकरण से}$

$$\frac{\text{ताय}}{\text{तार}} = \frac{k}{r} \text{ और } \sqrt{1 + \frac{\text{तार}^2}{\text{ताय}^2}} = \frac{\text{ताचा}}{\text{तार}} = \frac{\sqrt{r^2 + k^2}}{r}$$

$$\begin{aligned} \text{और चा} &= \int \frac{\sqrt{(r^2 + k^2)} \text{तार}}{r} = \int \frac{k^2 \text{तार}}{r \sqrt{(r^2 + k^2)}} + \int \frac{r \text{तार}}{\sqrt{(r^2 + k^2)}} \\ &= k \cdot \text{ला} \frac{r}{k + \sqrt{(r^2 + k^2)}} + \sqrt{r^2 + k^2} + \text{स्थि (१२ वें प्रक्रम का २३ वाँ} \end{aligned}$$

अभ्यास के लिये जो प्रश्न है उसे देखो)

अब यहाँ जो $y = 0$ तो $r = a$ इस में मानो कि चा = चा_१ तो

$$\text{चा}_1 = k \cdot \text{ला} \frac{a}{k + \sqrt{a^2 + k^2}} + \sqrt{a^2 + k^2} + \text{स्थि}$$

$$\text{इसलिये चा} - \text{चा}_1 = k \cdot \text{ला} \frac{r(k + \sqrt{a^2 + k^2})}{a(k + \sqrt{r^2 + k^2})} + \sqrt{r^2 + k^2} - \sqrt{a^2 + k^2} ।$$

७७। दीर्घवृत्त के चाप का आनयन ।

$$\text{दीर्घवृत्त का समीकरण, } r^2 = \frac{k^2}{a^2} (a^2 - y^2) \therefore \frac{r^2}{k^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

(चलनकलन का १०९वाँ प्रक्रम देखो)

यहाँ यदि $y =$ अज्याष और $r =$ ककोज्याष मान लें तो

$$\frac{\text{ताप}}{\text{ताष}} = \text{अकोज्याष, } \frac{\text{तार}}{\text{ताष}} = -\text{कज्याष । अब ७५वें प्रक्रम के (२) समीकरण}$$

$$\text{से } \frac{\text{ताचा}}{\text{ताष}} = \sqrt{(a^2 \text{कोज्याष}^2 + k^2 \text{ज्याष}^2)} \text{ इस लिये}$$

$$\begin{aligned} \text{चा} &= \int \sqrt{(a^2 \text{कोज्याष}^2 + k^2 \text{ज्याष}^2)} \text{ताप} = a \int \sqrt{(\text{कोज्याष}^2 + \frac{k^2}{a^2} \text{ज्याष}^2)} \text{ताप} \\ &= a \int \sqrt{(1 - \text{इ}^2 \text{ज्याष}^2)} \text{ताप यहाँ } 1 - \text{इ}^2 = \frac{k^2}{a^2} \text{ और } a = \text{वृहद्व्यासार्द्ध,} \end{aligned}$$

$$k = \text{लघुव्यासार्द्ध, स्पष} = \frac{\text{कय}}{\text{अर}} = \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}} \text{ ।}$$

यहाँ $\sqrt{(1 - \text{इ}^2 \text{ज्याष}^2)}$ इस का मान द्वियुक्पद सिद्धान्त से बिना फैलाये चल ज्ञान नहीं हो सकता इस लिये फैलाने से

$$\text{चा} = a \int (1 - \frac{1}{2} \text{इ}^2 \text{ज्याष}^2 - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 2} \text{इ}^4 \text{ज्याष}^4 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 4} \text{इ}^6 \text{ज्याष}^6 - \dots) \text{ताप}$$

यदि ० और a के बीच y के मान में अथवा ० और $\frac{\pi}{2}$ के बीच ϕ के मान में यदि ऊपर के चल का ज्ञान ३५वें प्रक्रम के लघूकरण सिद्धान्त से वा १२वें प्रक्रम के १५वें उदाहरण से करो तो दीर्घवृत्त के परिधि का चतुर्थांश

$$\begin{aligned} &= a \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ताष} - \frac{1}{2} \text{इ}^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्याष}^2 \text{ताष} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 2} \text{इ}^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्याष}^4 \text{ताष} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 4} \text{इ}^6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्याष}^6 \dots \dots \right\} \\ &= \frac{\pi a}{2} \left[1 - \frac{1}{2^2} \text{इ}^2 - \frac{1^2 \cdot 3}{2^2 \cdot 2^2} \text{इ}^4 - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5}{2^2 \cdot 2^2 \cdot 4^2} \text{इ}^6 - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7}{2^2 \cdot 2^2 \cdot 4^2 \cdot 2^2} \text{इ}^8 - \dots \right] \end{aligned}$$

इस का चौगुना करने से यदि $p = 2\pi a =$ वृहद्व्यास से उत्पन्न वृत्त की परिधि । तो दीर्घवृत्त की परिधि

$$= p \left(1 - \frac{1}{2^2} \text{इ}^2 - \frac{1^2 \cdot 3}{2^2 \cdot 2^2} \text{इ}^4 - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5}{2^2 \cdot 2^2 \cdot 4^2} \text{इ}^6 - \dots \right)$$

इस में यदि आदि के दो पदों को केवल ग्रहण करो और $इ''$ का मान बहुत अल्प होने के कारण और पदों को छोड़ दो तो दीर्घवृत्त की

$$\text{परिधि} = \pi \left(१ - \frac{१}{२} इ'' \right)$$

$$= \pi \left(\frac{४ - इ''}{४} \right) = \pi \left(\frac{३ - \frac{क''}{अ''}}{४} \right) = \pi \left(\frac{३अ'' - क''}{४अ''} \right)$$

यों अनेक प्रकार बना सकते हो (दीर्घवृत्तलक्षण देखो)

७८। अतिपरवलय के चाप का आनयन ।

$$\text{इस का समीकरण } र'' = \frac{क''}{अ''} (य'' - अ'') \text{ वा } \frac{य''}{अ''} - \frac{र''}{क''} = १$$

(चलनकलन का १११ वाँ प्रक्रम देखो)

यहाँ यदि $य = अछेप$ और $र = कस्पप$ ऐसा मानो तो

$$\frac{\text{ताय}}{\text{ताष}} = - \text{अस्पपछेप}, \frac{\text{तार}}{\text{ताष}} = \text{कछेप}$$

इसलिये ७५ वें प्रक्रम के (२) समीकरण से

$$\begin{aligned} \frac{\text{ताचा}}{\text{ताष}} &= \sqrt{(\text{अ''स्प''पछेप} + \text{क''छेप})} \\ &= \sqrt{(\text{अ''स्प''प} + \text{अ''स्प''प} + \text{क''स्प''प} + २\text{क''स्प''प} + \text{क''})} \\ &= \sqrt{\{ (\text{अ''} + \text{क''})\text{स्प''प} + \text{स्प''प}(\text{अ''} + २\text{क''}) + \text{क''} \}} \\ &= \text{क} \sqrt{\left\{ \frac{\text{अ''} + \text{क''}}{\text{क''}} \text{स्प''प} + \frac{\text{अ''} + २\text{क''}}{\text{क''}} \text{स्प''प} + १ \right\}} \end{aligned}$$

इसको फैलाने से सर्वत्र स्पप का कोई घात रहेगा जिस के चल का ज्ञान ३७ वें प्रक्रम के (३) उदाहरण से स्पष्ट हो जायगा ।

अथवा $र = \frac{क''}{अ''} \sqrt{य'' - अ''}$ इसी समीकरण से यहाँ

$$\begin{aligned} \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} &= \frac{\text{क}}{\text{अ}} \frac{\text{य}}{\sqrt{(य'' - अ'')}} \cdot \frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} = \left\{ \frac{(\text{क''} + \text{अ''}) \text{य''} - \text{अ''}}{\text{अ''} (\text{य''} - \text{अ''})} \right\}^{\frac{१}{२}} \\ &= \left[\frac{\text{इ''य''} - \text{अ''}}{\text{य''} - \text{अ''}} \right]^{\frac{१}{२}} \text{ यदि } \frac{\text{क''} + \text{अ''}}{\text{अ''}} = \text{इ''} \end{aligned}$$

इस लिये

$$\text{चा} = \int \sqrt{\left[\frac{\text{इ''य''} - \text{अ''}}{\text{य''} - \text{अ''}} \right]} \text{ताय} = \text{अ} \int \sqrt{\left[\frac{\text{इ''ल''} - १}{\text{ल''} - १} \right]} \text{ताल} \quad \{ \text{यदि } य = \text{अल} \}$$

$$\begin{aligned}
 &= अइ \int ल \frac{\sqrt{१ - \frac{१}{इ^२ ल^२}}}{\sqrt{ल^२ - १}} ताल \\
 &= अ \left\{ \int \frac{इल}{\sqrt{ल^२ - १}} \left(१ - \frac{१}{इ^२ ल^२} - \frac{१.१}{२.४} \frac{१}{इ^४ ल^४} - \frac{१.१.३}{२.४.६} \frac{१}{इ^६ ल^६} - \dots \right) ताल \right\} \\
 &= अ \left\{ \int \frac{इल}{\sqrt{ल^२ - १}} ताल - \frac{१}{२इ} \int \frac{ताल}{ल\sqrt{ल^२ - १}} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{१.१}{२.४इ^३} \int \frac{ताल}{ल^३\sqrt{ल^२ - १}} - \frac{१.१.३}{२.४.६इ^५} \int \frac{ताल}{ल^५\sqrt{ल^२ - १}} \dots \right\} \\
 &\text{यहाँ } \frac{ताल}{ल^म\sqrt{ल^२ - १}} = \frac{१}{म-१} \frac{\sqrt{ल^२ - १}}{ल^{म-१}} + \frac{म-२}{म-१} \int \frac{ताल}{ल^{म-२}\sqrt{ल^२ - १}} \text{ इस}
 \end{aligned}$$

लघूकरण सिद्धान्त से आदि पद को छोड़ और सब पदों के चल का मान जान सकते हो ।

और आदि पद $\frac{इल}{\sqrt{ल^२ - १}}$ ताल इस का चल $इ\sqrt{ल^२ - १}$ यह है ।

यहाँ म का मान विषम है इस लिये सब खण्डों में अन्त में $\int \frac{ताल}{ल\sqrt{ल^२ - १}}$

= छे-ल यह होगा

यदि ० और अनन्त के बीच ल के मान में चाप का मान अपेक्षित हो तो ऊपर के लघूकरण सिद्धान्त से

$$\begin{aligned}
 अइल - चा &= \frac{\pi अ}{२} \left(\frac{१}{२} \frac{१}{इ} + \frac{१.१}{२.४} \cdot \frac{१}{इ^३} + \frac{१.१.३}{२.४.६} \cdot \frac{१}{इ^५} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{१.१.३.५}{२.४.६.८} \cdot \frac{१}{इ^७} + \dots \right) \text{ यह सिद्ध होगा ।}
 \end{aligned}$$

७९ । आर्किमिडिज़ के सर्पिल का चापानयन (The Spiral of Archimedes) (चलनकलन में २८६ प्रक्रम का (४) वक्र देखो)

इस का समीकरण $\text{थ्रु} = अष$ इस लिये $\frac{ताथ्रु}{ताष} = अ$ । ७९ प्रक्रम के (३)

$$\text{समीकरण से } \frac{ताचा}{ताष} = \sqrt{\left[\text{थ्रु}^२ + \frac{ताथ्रु^२}{ताष^२} \right]}$$

$$\text{इस लिये चा} = \int \sqrt{\left[\text{थ्रु}^२ + \frac{ताथ्रु^२}{ताष^२} \right]} ताष = \int \sqrt{(\text{थ्रु}^२ + अ^२)} ताष$$

$$= अ \int \sqrt{(१ + प^२)} ताप = \frac{अप}{३} \sqrt{१ + प^२} + \frac{अ}{३} \ln | प + \sqrt{१ + प^२} | + स्थि ।$$

यदि प = ० तो चा = ० इस लिये स्थिराङ्क का मान्य शून्य होगा ।

८०। जिस वक्र का श्रु = अ (१ + कोज्याप) यह समीकरण है उस के चाप का मान जानना । (चलनकलन के २८५ प्रक्रम का (१) उदाहरण देखो) यहाँ $\frac{ताश्रु}{ताप} = - अज्याप$ इस लिये

$$चा = \int \sqrt{ \{ अ^२ (१ + कोज्याप)^२ + अ^२ ज्या^२ प \} } ताप$$

$$= अ \int \sqrt{ (२ + २कोज्याप) } ताप = २अ \int कोज्या^{\frac{१}{२}} ताप = ४अज्या^{\frac{१}{२}} + स्थि ।$$

यदि चाप की गणना वहाँ से करें जहाँ प = ० तो स्थिराङ्क का मान शून्य होगा । मूल का मान ऋण लेने से दूसरी दिशा का चाप = -४अज्या^{\frac{१}{२}} ऐसा होगा । यहाँ यदि प = π तो ऊपर के आधे का प्रमाण = ४अज्या^{\frac{१}{२}} = ४अ और ऋण मान से नीचे के आधे का प्रमाण = ४अज्या^{\frac{१}{२}} = ४अ ।

इस लिये समग्र चाप का प्रमाण = ८अ यह हुआ ।

इस वक्र को अङ्गरेजी में क्यारडियाइड (Cardioid.) कहते हैं ।

८१। लाघुरिक्थिक सर्पिल के चाप आनयन ।

(चलनकलन में २८६ प्रक्रम का (२) वक्र देखो)

$$यहाँ श्रु = अ \cdot इ \cdot \frac{प}{क} इस लिये प = क \cdot ला \frac{श्रु}{अ} और \frac{ताप}{ताश्रु} = \frac{क}{श्रु}$$

इस लिये ७५ प्रक्रम के (४) समीकरण से

$$चा = \int \sqrt{ \left[श्रु^२ \frac{ताप^२}{ताश्रु^२} + १ \right] } ताश्रु = \int \sqrt{ (क^२ + १) ताश्रु } = श्रु \sqrt{ क^२ + १ }$$

श्रुति का प्रमाण श्रु_१, श्रु_२ मानो तो उन के बीच के चाप का प्रमाण (श्रु_२ - श्रु_१) \sqrt{ क^२ + १ } यह होगा । (१)

चलनकलन से सिद्ध है कि इस सर्पिल में श्रुति और स्पर्शरेखा से उत्पन्न कोण की स्पर्शरेखा सर्वदा स्थिर क है इस लिये इस कोण को यदि भ कहो तो (१) को (श्रु_२ - श्रु_१) छेभ ऐसे भी लिख सकते हो

८२। अपचक्रालद (Epicycloid.) के चाप का आनयन ।

(चलनकलन में २८६ प्रक्रम का (१३) वक्र देखो)

इस में चलनकलन से सिद्ध कर सकते हो कि मूल बिन्दु से स्पर्शरेखा पर पड़े लम्ब का मान

$$= ल = (अ + २क) ज्या \frac{अप}{२क} \text{ और } श्रु^३ = अ^३ + ४क (अ + क) ज्या^३ \frac{अप}{२क}$$

$$\text{इस लिये } ल^३ = \frac{ग^३(श्रु^३ - अ^३)}{ग^३ - अ^३} \quad \text{जहाँ } ग = अ + २क$$

अब ७५ वें प्रक्रम के (६) वें समीकरण से

$$\text{चा} = \frac{\sqrt{(ग^३ - अ^३)}}{अ} \int \frac{श्रुताश्रु}{\sqrt{(ग^३ - श्रु^३)}} = -\frac{\sqrt{(ग^३ - अ^३)}}{अ} \sqrt{(ग^३ - श्रु^३)} + \text{स्थि}$$

परमनीच और परमउच्च में जहाँ क्रम से अ, अ + २क = ग श्रुति है इन के बीच में

$$\begin{aligned} \text{चाप का मान} &= \frac{अ+२क}{अ} \frac{श्रुताश्रु}{\sqrt{(ग^३ - श्रु^३)}} = \frac{\sqrt{(ग^३ - अ^३)}}{अ} \sqrt{ग^३ - अ^३} = \frac{ग^३ - अ^३}{अ} \\ &= \frac{(अ^३ + ४अक + ४क^३ - अ^३)}{अ} = \frac{४क(अ + क)}{अ} \quad \text{इस लिये इस का दूना} \end{aligned}$$

$\frac{८क(अ+क)}{अ}$ यह अपचक्रालद के पूरे चाप का प्रमाण है जिस की उत्पत्ति

चलितवृत्त के एक वार समग्र भ्रमण करने से होगी ।

८३। इसी प्रकार अतिचक्रालद (Hypocycloid) के चापानयन में भी

$$ल^३ = \frac{ग^३(अ^३ - श्रु^३)}{अ} \quad , \quad \text{जहाँ } ग = अ - २क$$

मानो कि $ग^३ < अ^३$ तो $\frac{\text{ताचा}}{\text{ताश्रु}} = \pm \frac{\sqrt{अ^३ - ग^३}}{अ} \frac{श्रु}{\sqrt{(श्रु^३ - ग^३)}}$ इस परसे पूर्ववत्

$\text{चा} = \pm \frac{\sqrt{अ^३ - ग^३}}{अ} \sqrt{श्रु^३ - ग^३} + \text{स्थि}$ और चलितवृत्तके एक वार घूम जाने में

$$\text{चाप} = \frac{८क(अ-क)}{अ} \quad ।$$

यदि $ग^३ > अ^३$ तो पहले सम्बन्ध को अर्थात् $\frac{\text{ताचा}}{\text{ताश्रु}}$ इस के मान को

$$\pm \frac{\sqrt{ग^३ - अ^३}}{अ} \frac{श्रु}{\sqrt{(ग^३ - श्रु^३)}} \text{ ऐसे लिख सकते हो। इस स्थिति में } क > अ \text{ तब}$$

चलितवृत्त के एक वार घूम जाने में वक्र के चाप का प्रमाण $\frac{८क(क-अ)}{अ}$ यह

होगा । जब $अ = २क$ तब $ग = ०$ और $ल = ०$ । ऐसी स्थिति में

$\frac{\text{ताचा}}{\text{ताश्रु}} = १$ इस लिये $\text{चा} = श्रु + \text{स्थि}$ । और चलितवृत्त के एक वार घूम जाने में

चा = २ अ = स्थिरवृत्त का व्यास ।

यदि अ = क तो ल = $\frac{३}{२}$ और ग = अ, श्रु = अ । ऐसी स्थिति में अतिचक्रालद विन्दु रूप होगा ।

$$\text{जब ल} = \frac{ग(\text{श्रु}-अ)}{ग-अ^२} \therefore \text{श्रु}-\text{ल} = \frac{\text{श्रु}ग-\text{श्रु}अ-ग\text{श्रु}+गअ}{ग-अ^२}$$

$$= \frac{अ(ग-\text{श्रु}^२)}{ग-अ^२} \therefore \text{ग}-\text{श्रु}^२ = \frac{\sqrt{ग-अ^२} \sqrt{\text{श्रु}^२-\text{ल}^२}}{अ} \text{ इस का उत्थापन अप-}$$

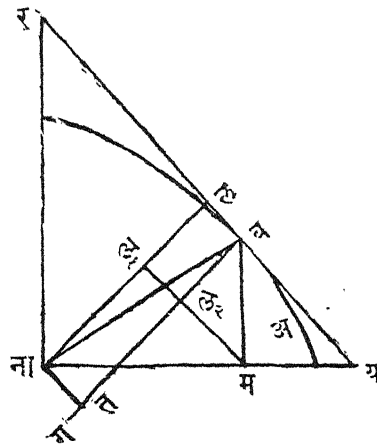
$$\text{चक्रालद के चापमान में देने से चा} = \pm \frac{(ग-अ) \sqrt{\text{श्रु}-\text{ल}}}{अ} + \text{स्थि}$$

ऐसा भी हो सकता है ।

८४। मूलविन्दु से वक्र के किसी स्पर्श रेखा पर पड़े लम्ब और लम्ब और य अक्ष से उत्पन्न कोण इन दोनों के वश से वक्र का चापानयन ।

कल्पना करो किसी वक्र का ना मूलविन्दु नार = र अक्ष, नाय = य अक्ष । व विन्दु की स्पर्शरेखा वल । ना से इस पर पड़ा हुआ लम्ब = ल और \angle लनाय = प है ।

वक्र में मानो कि चाप की गणना अ विन्दु से आरम्भ हो कर व की ओर है । व विन्दु का भुज = य = नाम और कोंटि = र = वम । म विन्दु से नाल पर पड़े हुए लम्ब का मूल विन्दु ल_२ और मल_२ पर व विन्दु से पड़े हुए लम्ब को वल_२ समझो । दोनों अक्षों को परस्पर लम्बरूप मान लो ।



त्रिकोणमिति से, नाल = ल = नाम कोज्याष + वल_२ = यकोज्याष + रज्याष
और वल = च = नाम ज्याष - मल_२ = यज्याष - रकोज्याष

चलनकालन से—कोस्पष = $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ क्योंकि गणना अ से ब की ओर है इस लिये ज्यों ज्यों र बढ़ेगा त्यों त्यों य की गति ऋण होगी ।

$$\sqrt{१ + \text{कोस्पष}} = \sqrt{१ + \frac{\text{तार}^२}{\text{ताय}^२}} = \frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} = - \text{कोछेष (ऊपर की युक्ति से)}$$

ताप के वश से ल का तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से ।

$$\begin{aligned} \frac{\text{ताल}}{\text{ताप}} &= \text{कोज्याष} \frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} - \text{यज्याष} + \text{ज्याष} \frac{\text{तार}}{\text{ताप}} + \text{रकोज्याष} \\ &= \text{कोज्याष} \frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} + \text{ज्याष} \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \cdot \frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} - (\text{यज्याष} - \text{रकोज्याष}) \\ &= \text{कोज्याष} \frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} - \text{कोज्याष} \frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} - \text{च} = - \text{च} \end{aligned}$$

एक बार और तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$\begin{aligned} \frac{\text{ताल}}{\text{ताप}^२} &= - \frac{\text{ताच}}{\text{ताप}} = - \left(\text{ज्याष} \frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} + \text{कोज्याषय} - \text{कोज्याष} \frac{\text{तार}}{\text{ताप}} + \text{ज्याषर} \right) \\ &= - \frac{\text{ज्याष} \text{ताय}}{\text{ज्याष} \text{ताप}} - \text{कोज्याष} \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \cdot \frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} - \text{ल} \\ &= \text{ज्याषकोछेष} \frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} + \text{कोज्याषकोस्पष} \frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} - \text{ल} \\ &= \frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} (\text{ज्याषकोछेष} + \text{कोज्याषकोछेष}) - \text{ल} \\ &= \frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} \text{कोछेष} - \text{ल} = - \frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} \cdot \frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} - \text{ल} = - \text{ल} - \frac{\text{ताचा}}{\text{ताप}} \end{aligned}$$

इस लिये चलानयन से

$$\int \frac{\text{ताल}}{\text{ताप}^२} \text{ताप} = \frac{\text{ताल}}{\text{ताप}} = - \int \text{लताप} - \int \frac{\text{ताचा}}{\text{ताप}} \text{ताप} = - \int \text{लताप} - \text{चा} = \text{च}$$

$$\text{वा च-चा} = \int \text{लताप} ।$$

वक्र के समीकरण पर से और $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = - \text{कोस्पष}$ इस से य और र का मान प के रूप में आ सकता है इन का उत्थापन ल में देने से ल भी कोई प का फल होगा फिर चा = $\frac{\text{ताल}}{\text{ताप}} + \int \text{लताप}$ इस पर से चाप का मान जान सकते हो । व की ओर गणना करने से चा का ऋण चिह्न छोड़ दिया है ।

ऊपर जो प. ल इत्यादि का परस्पर सम्बन्ध दिखलाया है वह सब हम ने घुचरचार नामक ग्रन्थ में लिखा है । बालावबोध के लिये यहाँ भी थोड़ा सा दिखला दिया है ।

ऊपर जो ल = यकोज्याप + रज्याप

$$\frac{\text{ताल}}{\text{ताप}} = \text{— च} = \text{—यज्याप} + \text{रकोज्याप}$$

ये सिद्ध हुए हैं इन पर से

लकोज्याप = यकोज्या प + रज्यापकोज्याप

$$\frac{\text{ताल}}{\text{ताप}} \text{ज्याप} = \text{—चज्याप} = \text{—यज्याप} + \text{रज्यापकोज्याप}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{अन्तर करने से लकोज्याप—ज्याप} \frac{\text{ताल}}{\text{ताप}} = \text{य} \\ \text{इसी प्रकार ल ज्याप + कोज्याप} \frac{\text{ताल}}{\text{ताप}} = \text{र} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (१)$$

यदि एक ऐसे वक्र का ज्ञान करना हो जिस के चाप पर से उद्दिष्ट \int लताप इस का ज्ञान अपेक्षित हो जहाँ ल कोई प का फल है तो (१) समीकरण से स्पष्ट है कि ल, कोज्याप, ज्याप, और $\frac{\text{ताल}}{\text{ताप}}$ इन सब पर से उस वक्र का भुज, और कोटि विदित हो जाँयेंगे ।

इसी क्षेत्र में यदि वक्रजातीय वृत्त का केन्द्र ग और व्यासार्द्ध गव = वि मानो (चलनकलन का १७वाँ अध्याय देखो) तो चलनकलन के १६८

और १७१ प्रक्रमों से, वि = श्रु $\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताल}} = \frac{\text{ताचा}}{\text{ताप}}$, इस लिये $\frac{\text{ताल}}{\text{ताप}} = \text{श्रु} \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताचा}}$

$$\text{और च} = \text{श्रुकोज्या} \angle \text{नावल} = \text{—श्रु} \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताच}}$$

$$\text{इसलिये — च} = \frac{\text{ताल}}{\text{ताप}} \text{ ।}$$

ना विन्दु से वक्रजातीय व्यासार्द्ध के ऊपर नात लम्ब डालो तो स्पष्ट है कि नात = च = बल । और वक्र के प्रति विन्दु के भिन्न भिन्न जो वक्रजातीय वृत्तकेन्द्र होंगे उन पर गये हुए वक्र अर्थात् अवलूत (चलनकलन का १७५ वाँ प्रक्रम देखो) के साथ नात का वैसाही सम्बन्ध रहेगा

जैसा कि व विन्दु के साथ बल अर्थात् च का है। यदि त विन्दु का अक्षीय भुज गुम्भ ल, ष मानें और तग = च तो

$$\delta = \delta - \frac{\pi}{2} \text{ और } \overset{1}{\text{ल}} = \text{च}$$

$$\text{और गत} = \overset{1}{\text{च}} = - \frac{\overset{1}{\text{ताल}}}{\overset{1}{\text{ताष}}} = - \frac{\overset{1}{\text{ताल}}}{\overset{1}{\text{ताष}}} = - \frac{\overset{1}{\text{ताच}}}{\overset{1}{\text{ताष}}} = \frac{\overset{1}{\text{ताल}}}{\overset{1}{\text{ताष}^2}}$$

क्योंकि अवलूत के लक्षण से गव रेखा अवलूत की स्पर्शरेखा होगी

$$\text{और वि} = \text{वत} + \text{तग} = \overset{1}{\text{ल}} + \overset{1}{\text{च}} = \overset{1}{\text{ल}} + \frac{\overset{1}{\text{ताल}}}{\overset{1}{\text{ताष}}}$$

$$\text{परंतु वि} = \frac{\overset{1}{\text{ताचा}}}{\overset{1}{\text{ताष}}}, \text{ इस लिये } \frac{\overset{1}{\text{ताचा}}}{\overset{1}{\text{ताष}}} = \overset{1}{\text{ल}} + \frac{\overset{1}{\text{ताल}}}{\overset{1}{\text{ताष}}}$$

$$\text{और चा} = \int \overset{1}{\text{ल}} \overset{1}{\text{ताष}} + \frac{\overset{1}{\text{ताल}}}{\overset{1}{\text{ताष}}} \text{ यही पहले भी सिद्ध हुआ था।}$$

यदि प्रत्येक स्पर्शरेखाओं के ऊपर ना विन्दु से लम्ब डाले जायँ और उन लम्बमूलों में लगाकर एक वक्र करें और इसके ल विन्दु पर जो स्पर्शरेखा होगी उस पर ना विन्दु से जो लम्ब पड़ा उसको ल_२ कहो तो चलनकलन के १३१ वें प्रक्रम से $\frac{१}{\overset{2}{\text{ल}}_2} = \frac{१}{\overset{2}{\text{ल}}_1} + \frac{१}{\overset{2}{\text{ल}}_1} \cdot \frac{\overset{2}{\text{ताल}}_1}{\overset{2}{\text{ताष}}_1}$ (क्योंकि इस वक्र की श्रुति = ल है) इस में $\frac{\overset{2}{\text{ताल}}_1}{\overset{2}{\text{ताष}}_1}$ के स्थान में च का उत्थापन देने में

$$\frac{१}{\overset{2}{\text{ल}}_2} = \frac{१}{\overset{2}{\text{ल}}_1} + \frac{\overset{2}{\text{च}}_1}{\overset{2}{\text{ल}}_1} = \frac{\overset{2}{\text{ल}}_1 + \overset{2}{\text{च}}_1}{\overset{2}{\text{ल}}_1} = \frac{\overset{2}{\text{श्रु}}_1}{\overset{2}{\text{ल}}_1}$$

इसलिये ल_२ = $\frac{\overset{2}{\text{ल}}_1}{\overset{2}{\text{श्रु}}_1}$ यह एक चमत्कृत सिद्धान्त उत्पन्न होता है।

ऊपर के क्षेत्र में अ विन्दु से व की और जब चा = चा_१ तो च = च_१ और जब चा = चा_२ तब च = च_२ ऐसा मानो तो

$$\overset{2}{\text{चा}}_2 - \overset{2}{\text{चा}}_1 + \overset{2}{\text{च}}_2 - \overset{2}{\text{च}}_1 = \int_{\overset{2}{\text{चा}}_1}^{\overset{2}{\text{चा}}_2} \overset{2}{\text{लताष}} \text{ यह उत्पन्न होगा}$$

जहाँ चा_२ और चा_१ सम्बन्धी ष_२ और ष_१ हैं।

ध्रुव स्थान से किसी ष_१ में यदि श्रुति का मान श्रु_१ और च का मान च_१ हो तो स्पष्ट है कि श्रुति नियत अक्ष के चारों ओर घूम कर जब फिर अपने पहले

स्थान पर पहुँचेगी तब p का मान $p_2 = p_1 + 2\pi$ यह और $\theta_2 = \theta_1$, $\psi_2 = \psi_1$,
ऐसी स्थिति में जो सीमित वक्र होंगे

उनके परिधि का मान = $\int_{p_1}^{p_1 + 2\pi} l \, d\psi$ यही होगा ।

८५। ८४ प्रक्रम के सिद्धान्त की व्याप्ति दिखाने के लिये दो उदाहरण दिखलाते हैं ।

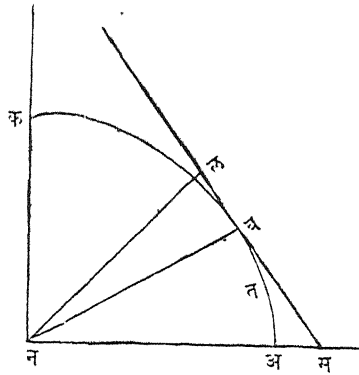
(१) मानो कि अतवक एक दीर्घवृत्त का चतुर्थांश है जिस का केन्द्र n , बृहद्व्यासार्द्ध $नअ = अ$, लघुव्यासार्द्ध $नक = क$, v बिन्दु की स्पर्शरेखा लवम और उस पर केन्द्र से पड़ा लम्ब $नल = ल$ है तो n को मूलबिन्दु मानने से इसका समीकरण $\frac{x^2}{क^2} + \frac{y^2}{अ^2} = 1$ यह होगा । यहाँ यदि

$\angle लनस = \psi$ तो ८४ प्रक्रम से $ल = यकोज्या\psi + रज्या\psi$ ।

$वल = व = यज्या\psi - रकोज्या\psi$ ।

$$\text{और } \frac{र^2}{क^2} = 1 - \frac{य^2}{अ^2} \therefore \frac{2र}{क} \frac{तार}{ताय} = -\frac{2य}{अ} \text{ और } \frac{तार}{ताय} = -\frac{य}{र} \frac{क}{अ}$$

(१)



$$\text{और } ल = यकोज्या\psi + रज्या\psi = ज्यापर (कोस्प\psi \times \frac{य}{र} + 1) \dots$$

$$= ज्यापर \left[\frac{अ}{क} कोस्प\psi + 1 \right] \dots \dots \dots (१)$$

$$\text{परन्तु } \frac{यक}{रअ} = कोस्प\psi \therefore \frac{यक}{रअ} = कोस्प\psi \mid \frac{य}{र} = \frac{अकोस्प\psi}{क}$$

और $\frac{y}{r} = \frac{\text{अ}^{\circ}\text{कोस्प}^{\circ}\text{प}}{k}$ । एक में जोड़ देने से

$$\frac{k}{r} = \frac{\text{अ}^{\circ}\text{कोस्प}^{\circ}\text{प} + k}{k}$$

मूल लेने से $k = \sqrt{1 + (1 - \text{इ}^{\circ})^{-2}} \text{कोस्प}^{\circ}\text{प} \dots \dots \dots (२)$

$$\therefore r = \frac{k}{\sqrt{1 + (1 - \text{इ}^{\circ})^{-2}} \text{कोस्प}^{\circ}\text{प}}$$

इस का उत्थापन (१) में देने से

$$\begin{aligned} l &= \text{ज्याषर} \left[\frac{\text{अ}^{\circ}\text{कोस्प}^{\circ}\text{प}}{k} + 1 \right] \\ &= \text{ज्याष} \frac{k}{\sqrt{1 + (1 - \text{इ}^{\circ})^{-2}} \text{कोस्प}^{\circ}\text{प}} \{ (1 - \text{इ}^{\circ})^{-2} \text{कोस्प}^{\circ}\text{प} + 1 \} \\ &= \text{ज्याषक} \sqrt{1 + (1 - \text{इ}^{\circ})^{-2}} \text{कोस्प}^{\circ}\text{प} \\ &= \text{अ} \sqrt{1 + \text{इ}^{\circ}} \sqrt{\text{ज्या}^{\circ}\text{ष} - \text{इ}^{\circ}\text{ज्या}^{\circ}\text{ष} + \text{कोज्या}^{\circ}\text{ष}} = \text{अ} \sqrt{1 - \text{इ}^{\circ}\text{ज्या}^{\circ}\text{ष}} \\ &\text{अव अ} \sqrt{(1 - \text{इ}^{\circ}\text{ज्या}^{\circ}\text{ष})} \text{ इस ल पर से} \\ &\text{अव + वल} = \text{अ} \int \sqrt{1 - \text{इ}^{\circ}\text{ज्या}^{\circ}\text{ष}} \end{aligned}$$

वक्र में व बिन्दु ऐसा कल्पना करें जिसका भु = $\frac{1}{2}$ = अज्याप और कोटि = $\frac{1}{2}$ = ककोज्याष तो ७७ वें प्रक्रम से

$$k = \text{अ} \int \sqrt{(1 - \text{इ}^{\circ}\text{ज्या}^{\circ}\text{ष})}$$

इसलिये अव + वल = कत यह सिद्ध हुआ । (अ)

और व बिन्दु का भुज यदि य तो ८४वें प्रक्रम से ल के रूप में य

$$\begin{aligned} = \text{ल कोज्याष} - \frac{\text{ताल}}{\text{ताष}} \text{ज्याष} &= \text{अकोज्याष} \sqrt{1 - \text{इ}^{\circ}\text{ज्या}^{\circ}\text{ष}} + \frac{\text{अइ}^{\circ}\text{ज्या}^{\circ}\text{षकोज्याष}}{\sqrt{(1 - \text{इ}^{\circ}\text{ज्या}^{\circ}\text{ष})}} \\ &= \frac{\text{अकोज्याष}}{\sqrt{(1 - \text{इ}^{\circ}\text{ज्या}^{\circ}\text{ष})}} \dots \dots \dots (क) \end{aligned}$$

$$\left(\text{क्योंकि यहाँ वल} = \text{च} = - \frac{\text{ताल}}{\text{ताष}} = \frac{\text{अइ}^{\circ}\text{ज्याषकोज्याष}}{\sqrt{(1 - \text{इ}^{\circ}\text{ज्याष})}} \right]$$

वल के मान में (क) का उत्थापन देने से

बल = इ'यज्याष । इसी जगह यदि त के भुज का य' = अज्याष
इस का उत्थापन दें तो

$$\text{बल} = \frac{\text{इ'यय}^1}{\text{अ}} \text{ इस पर से और (अ) के रूप से}$$

$$\text{कत—अव} = \text{बल} = \frac{\text{इ'यय}^1}{\text{अ}}, \dots \dots \dots \text{(ग)}$$

इस सिद्धान्त को फ्यागनानी (Fagnani) ने निकाला है इसलिये उन के आदरार्थ इसे फ्यागनानी का सिद्धान्त (Fagnani's Theorem) कहते हैं। बल का मान चलनकलन के ११वें अध्याय में भी इ'यज्याष यह निकाल सकते हो।

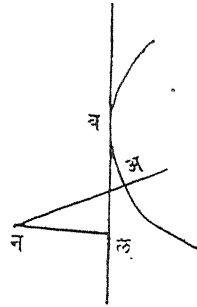
$$\text{(क) का वर्ग कर देने से } \frac{\text{अ'—अ'ज्या'ष}}{१—इ'ज्या'ष} = \frac{\text{अ'—य'}}{१—\frac{\text{इ'य'}}{\text{अ}}} = \text{य'}$$

छेदगम कर समशोधन से

$\text{इ'य'य'—अ'(य'+य')} + \text{अ}^2 = 0$ इस से यह सिद्ध होता है कि य के स्थान में य' का और य' के स्थान में य का उत्थापन देने से भी

पूर्ववत् फल उत्पन्न होगा। इस लिये कव—अत = $\frac{\text{इ'यय}^1}{\text{अ}}$ यह भी होगा

(२)



मानो कि किसी अतिपरबलय का केन्द्र न, अ शिरःस्थान, बल व बिन्दु पर स्पर्शरेखा और इस पर न से पड़ा लम्ब नल है।

यहाँ पर भी यदि $\angle \text{अनल} = \phi$ और $\text{नल} = \text{ल}$ तो (१) उदाहरण के ऐसा सिद्ध कर सकते हो कि

$$\text{बल—अव} = \text{अ} \int \sqrt{(१—इ'ज्या'ष)} \text{ ताष}$$

चलनकलन के १३वें अध्याय से अतिपरबलय के अनन्त दूर की स्पर्शरेखा अर्थात् असीमपथ निकालो तो उस समय $\frac{\text{तार}}{\text{ताप}} = \pm \frac{अ}{क}$ इस लिये

उस स्थान में ϕ का मान $अ$, कहो तो कोस्पअ, $= \frac{क}{अ} = \sqrt{इ-१}$ अतिपरबलय के लक्षण से उस समय $अ$ स्थान से अनन्त दूर तक जो अतिपरबलय का चाप हो उसको $न$ स्थान से असीमपथ जो हो उसके मान में घटा देने से शेष $= अ \int_0^{अ} \sqrt{(१-इज्या^२\phi)}$ ताप यही होगा ।

यह शेष वही है जो ७८ प्रक्रम के अन्त में सिद्ध हुआ है क्योंकि उस समय अइल यह असीमपथ ही का मान होगा ।

८४ प्रक्रम में जो सिद्धान्त दिखलाया है अर्थात् चा $= \frac{\text{तार}}{\text{ताप}} + \int$ लताप यह लेजेण्ड्र (Legendre) का निकाला हुआ है (See Traité des Fonctions Elliptiques)

८६ अति परबलय के चाप का मान जानने के लिये ल्याण्डन का सिद्धान्त (Landen's Theorem on a Hyperbolic Arc.)

अतिपरबलय का कोई चाप कोई दो दीर्घवृत्तों के चाप से प्रकाशित कर सकते हैं ।

किसी त्रिभुज में जहाँ आ, का, गा कोण और उन के संमुख भुज अ, क, ग हैं सरलत्रिकोणमिति से स्पष्ट है कि

$$ग = अकोज्याका + ककोज्याआ । \dots \dots \dots (१)$$

मानो कि शिरःस्थान का वहिर्गत कोण गा = आ + का है । और अ, क दो भुज तो स्थिर और बाक़ी सब अवयव त्रिभुज में चल हैं

तो गा = आ + का और ताआ + ताका = तागा इससे (१) को गुण देने से गतागा = (अकोज्याका + ककोज्याआ) ताआ + (अकोज्याका + क कोज्याआ) ताका चल-ज्ञान करने से

$$\int \text{गतागा} = \int \text{अकोज्याकाताआ} + \int \text{ककोज्याआताका} + २\text{अज्याका} + \text{स्थि}$$

वा सरलत्रिकोणमिति से

$$\int \sqrt{(अ^२ + क^२ + २अककोज्यागा)}\text{तागा} = \int \sqrt{(अ^२ - क^२ज्या^२आ)} \text{ताआ}$$

$$+ \int \sqrt{(क - अज्याका)ताका + २अज्याका + स्थि} \dots \dots \dots (२)$$

परन्तु $\sqrt{(अ + क + २अक कोज्यागा)}$

$$= \sqrt{\{(अ - क)ज्या\frac{गा}{२}(अ + क)कोज्या\frac{गा}{२}\}}$$

इस लिये (२) का रूप

$$\int \sqrt{\{(अ - क)ज्या\frac{गा}{२} + (अ + क)कोज्या\frac{गा}{२}\}}$$

$$= \int \sqrt{(अ - कज्याअ)ताआ + \int \sqrt{(क - अज्याका)ताका$$

+ २अज्याका + स्थि

$$\text{इस में } \left[\frac{अ - क}{अ + क} \right] = १ - इ, ज्या \frac{गा}{२} ज्यां प ।$$

$$\frac{क}{अ} = इ, ज्यां आ = ज्यां प, \frac{अ}{क} = इ, ज्यां का = ज्यां प, कल्पना करें$$

जहाँ अ > क तो

$$२(अ + क) \int \sqrt{(१ - इज्यां प)ताप}$$

$$= अ \int \sqrt{(१ + इज्यां प)ताप} + क \int \sqrt{(१ - इज्यां प)ताप}$$

+ २अज्याका + स्थि \dots \dots \dots (३)

देखो यहाँ बायें पक्ष का चल उस दीर्घवृत्त के द्विगुण चाप का प्रमाण है जिसका वृहद्व्यास = २ (अ + क) और दहने पक्ष का प्रथम चल उस दीर्घवृत्त का एक चाप है जिसका वृहद्व्यासार्द्ध = अ । दोनों में क्रम से इ और इ, ऊपर की कल्पना से निष्पत्तिमान है । (७७ वाँ प्रक्रम देखो) इन दोनों के अन्तर तुल्य समीकरण से दहने पक्ष का चल होगा जो कि ८५ वें प्रक्रम के (२) उदाहरण से एक सरल रेखा और उस अतिपरवलय के चाप के अन्तर्ग समान है जिस का लघुव्यास = २क और निष्पत्तिमान = $\frac{अ}{क}$ यह है ।

इस पर से किसी समय में ८५ वें प्रक्रम के (२) उदाहरण से बल का मान जान कर और २अज्याका के ज्ञान से दोनों दीर्घवृत्तों के चापों पर से अतिपरवलय का चाप जान सकते हैं ।

जब सरलत्रिकोणमिति से स्पष्ट है कि

$$\text{अज्याका} = कज्याआ । गा = आ + का$$

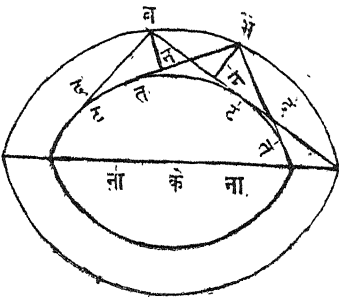
इसलिये आ ० से लेकर π तक जब पहुँचेगा तो गा भी ० से लेकर π तक पहुँचेगा । और अज्याका = कज्याआ के नियम से उस समय का ० लेकर अ_१ (जहाँ अ_१ = ज्या^{-१} क_१) तक पहुँच कर फिर घटते घटते ० तक आजायगा । ऐसी स्थिति में ककोज्याआ और ताका दोनों ऋण होंगे इसलिये ककोज्याआ ताका सर्वदा धन रहेगा तब मान्त्-चलानयन से (३) का रूप

$$2(a+k) \int_0^{\pi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} \, d\phi$$

$$= 2a \int_0^{\pi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} \, d\phi + 2k \int_0^{\pi} \sin^2 \phi \, d\phi$$

ऐसा होगा । इस में दो का भाग दे कर समशोधन से यह दिखला सकते हो कि अतिपरबलय का अनन्त चाप और असीमपथ का अन्तर दो दीर्घवृत्तों के चतुर्थांश परिध्यन्तर तुल्य है । यह भी ल्याण्डेन (Landen) की कल्पना है ।

८७। डाक्टर ग्रेव का सिद्धान्त (Theorem of Dr. Graves) कल्पना करो कि एक नाभिक दो दीर्घवृत्त हैं । बड़े दीर्घवृत्त के परिधि में कोई व विन्दु लेकर छोटे दीर्घवृत्त पर वहाँ से बट, बट दो स्पर्शरेखा डाला तो बट और बट के योग में दीर्घवृत्त का टट चाप घटा दो तो शेष सर्वदा स्थिर रहेगा



व विन्दु के अत्यन्त निकट बड़े दीर्घवृत्त में एक भ विन्दु कल्पना करो और वहाँ से छोटे दीर्घवृत्त पर भत, भत दो स्पर्शरेखा खींचो इन दोनों का पहली स्पर्शरेखा में क्रम से द और द विन्दु पर योग समझो । बट पर भन और भत पर वन लम्ब समझो ।

देखो दोनों दीर्घवृत्त एक नाभिक हैं इस लिये दीर्घवृत्त लक्षण से $\angle वभन = \angle भवन$ $\therefore वन = भन$

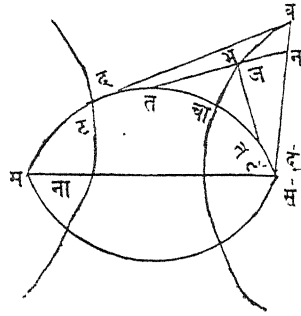
और वट = टद + दन = टद + दत + तन = टत + तन = टत + तभ - भन ।

इसी तरह बट = वन + तभ - टत ।

दोनों के योग से वट + बट = भत + भत + टत - टत ।

दोनों में टट चाप को घटा देने से वट + वट' - टट' = भत + भत' - तत'
अर्थात् व विन्दु यदि भ पर हो तो भी शेष वही रहता है। इसी प्रकार थोड़ा थोड़ा विन्दुओं को हटा हटा सर्वत्र दिखला सकते हो कि शेष एक ही रहेगा।

८८। इसी तरह यदि एक अतिपरवलय और एक दीर्घवृत्त दोनों एक नाभिक हों तो अतिपरवलय के किसी विन्दु से जो दो स्पर्शरेखा दीर्घवृत्त में होंगी उनका अन्तर स्पर्शरेखान्तर्गत अतिपरवलय और दीर्घवृत्त का जो सम्पात विन्दु है वहाँ से दोनों स्पर्श विन्दु तक जो दीर्घवृत्त के दो चाप होंगे उनके अन्तर तुल्य होता है। क्योंकि यहाँ भी जो ऊपर की क्रिया करो तो



इसी तरह वट' = टद' + नद' + वन' = टद' + तद'
+ भत' + वन' = टत' + भत' + वन'

दोनों का अन्तर करने से (वट - वट') = टत -

टत' + (भत - भत') और टचा - टचा' = अ
= टत + तचा - (टत' + तचा')

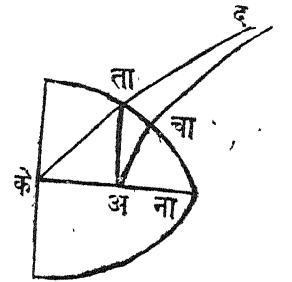
इन दोनों का अन्तर करने से (वट - वट')
- अ = (भत - भत') - (तचा - तचा')

इसी प्रकार भ को बदलने से दो दो पक्ष

समान होते जाँयगे अन्त में जब भ, चा के पास आवेगा तब स्पर्शरेखान्तर और चापान्तर दोनों शून्य हो जाँयगे इसलिये (वट - वट') - (टचा - टचा') = 0 अर्थात् वट - वट' = टचा - टचा'।

यदि दीर्घवृत्त के परिधि ही में कोई विन्दु लेकर अतिपरवलय ही पर दो स्पर्शरेखा डाली जाय तो भी यहाँ पर यही सिद्धान्त ठीक ठहरेगा यदि दोनों स्पर्शरेखायें अतिपरवलय के एक ही शाखा पर हों।

इस पर से असीमपथ और अतिपरवलय का अनन्त-चाप इनका अन्तर सरलरेखा और अतिपरवलय के चाप रूप में प्रकाश कर सकते हैं। जैसे कल्पना करो कि अचा अतिपरवलय का असीमपथ केतद है और अ विन्दु की स्पर्शरेखा अत है त विन्दु में लगाकर अति परवलय के साथ एक एकनाभिक



दीर्घवृत्त बनाया तो ऊपर के सिद्धान्त से अनन्त दूर पर तद् को स्पर्शरेखा समझ लेने से तद्—अत = चादचाप—अचा

केत + अचा इसको जोड़ देने से

तद् + केत—अत + अचा = चाद + अचा—अचा + केत

अर्थात् केद—अत + अचा = अद—अचा + केत

समशोधन से केद—अद = अत + केत—२अचा

इसलिये केत और अत के योग में दूने अचा को घटा देने से शेष असीम-पथ और अतिपरवलय सम्बन्धि अनन्त चाप का अन्तर होता है यह सिद्ध हुआ ।

८९। डिकार्टेस के आवल (Oval of Descartes) का चापानयन ।

इसकी दोनों नाभी ना, ना हैं नाभी से वक्र के किसी बिन्दु व तक जो रेखा है उन में त·श्रु + द·श्रु = न·ग यह नियम है जहाँ त, द और न स्थिराङ्क हैं नाना = ग, नाव = श्रु । नाव = श्रु यहाँ यदि \angle बनाना = ष तो सरलत्रिकोण-मिति से

$$\begin{aligned} \text{श्रु}^2 &= \text{श्र}^2 + \text{ग}^2 - 2\text{श्रुगकोज्याष} \\ &= \left[\frac{\text{न}\cdot\text{ग} - \text{श्रु}\cdot\text{त}}{\text{द}} \right]^2 \\ &= \left[\frac{\text{न}^2\text{ग}^2 - 2\text{तनगश्रु} + \text{श्रु}^2\text{त}^2}{\text{द}^2} \right] \end{aligned}$$

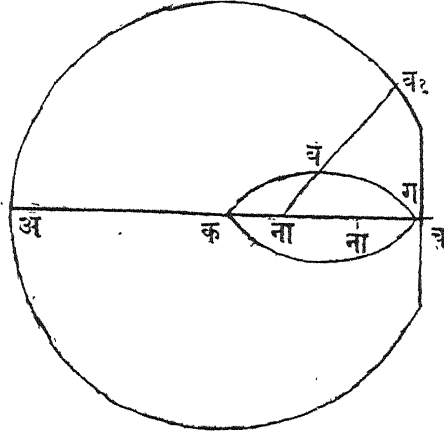
छेदगम और समशोधन से

$$\text{श्रु}^2(\text{द}^2 - \text{त}^2) - 2\text{श्रुग}(\text{द}^2\text{कोज्याष} - \text{तन}) - \text{ग}^2(\text{न}^2 - \text{द}^2) = 0$$

$$\text{वा श्रु}^2 - \frac{2\text{श्रुग}(\text{द}^2\text{कोज्याष} - \text{तन})}{\text{द}^2 - \text{त}^2} - \frac{\text{ग}^2(\text{न}^2 - \text{द}^2)}{\text{द}^2 - \text{त}^2}$$

$$\text{अथवा श्रु}^2 - 2\text{श्रुग} \frac{\text{तन} - \text{द}^2\text{कोज्याष}}{\text{त}^2 - \text{द}^2} + \frac{\text{ग}^2(\text{न}^2 - \text{द}^2)}{\text{त}^2 - \text{द}^2} = 0$$

इस में यदि ग $\frac{(\text{तन} - \text{द}^2\text{कोज्याष})}{\text{त}^2 - \text{द}^2} = \text{प}_2$ । और



$$\frac{(गं नं - दं)}{तं - दं} = आ तो$$

$$\text{श्रुं} - २प, \text{श्रु} + आ = ० \quad \dots \quad (१)$$

इस पर से श्रु = $p_1 \pm \sqrt{p_1^2 - आ}$ वा नाव, = $v_1 + \sqrt{p_1^2 - आ}$ ।

नाव = $p_1 - \sqrt{p_1^2 - आ}$ इस से सिद्ध होता है कि यदि त, द, न सम्भाव्य और अनुल्य संख्या हों तो

इस वक्र में दो आवल होंगे एक बाहर में और दूसरा भीतर में रहेगा जैसा कि इस क्षेत्र में देख पड़ता है ।

अब यहाँ (१) का तात्कालिकसम्बन्ध निकालने से

$$\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}} \cdot \frac{१}{\text{श्रु}} = \frac{p_1}{\sqrt{p_1^2 - आ}} \quad \text{जहाँ } p_1 = \frac{\text{ताप}_1}{\text{ताप}}$$

इस पर से

$$\frac{\text{ताचा}}{\text{ताप}} \cdot \frac{१}{\text{श्रु}} = \frac{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 - आ}}{\sqrt{p_1^2 - आ}}$$

$$\text{वा चा} = \int \frac{p_1 \sqrt{p_1^2 + p_2^2 - आ} \text{ताप} \pm \int \sqrt{p_1^2 + p_2^2 - आ} \text{ताप}}$$

यहाँ धन चिह्न बाहरी आवल के लिये और ऋण चिह्न भीतरी के लिये है ।

इस लिये दोनों के सजातीय चापों का अन्तर = $२ \int \sqrt{(अं + प_1^2 - आ) \text{ताप}}$

$$= २ \int \sqrt{(अं + २अक कोज्याप + कं - आ) \text{ताप}} \dots \dots (२)$$

$$\text{यदि } p_1 = \frac{ग(\text{तन} - दं \text{ कोज्याप})}{तं - दं} = अ + क \text{ कोज्याप} ।$$

देखो (२) का रूप ८६ प्रक्रम से एक दीर्घवृत्त के चाप समान हो सकता है इस लिये दोनों आवलों के सजातीय चापों का अन्तर एक दीर्घवृत्त के चाप रूप में प्रकाशित कर सकते हैं । इस सिद्धान्त को रावर्ट्स ने निकाला है (Mr. W. Roberts) त, द, और न, के भिन्न भिन्न मानों पर से यही आवल, वृत्त, दीर्घवृत्त, अतिपरबलय इत्यादि का रूप हो जायगा इस लिये आवल को इन सब वक्रों का उत्पादक कह सकते हैं ।

९०। यदि किसी वक्रक्षेत्र के अनवलूत का समीकरण मालूम हो तो चलन-कलन के १७६वें प्रक्रम के (३) समीकरण से चलज्ञान के बिना ही वक्र के चाप का

ज्ञान हो सकता है क्योंकि अनवल्लूत समीकरण पर से $\overset{\circ}{\text{चा}} \pm \overset{\circ}{\text{वि}} = \overset{\circ}{\text{ट}}$ इस में जो वक्रजातीय वृत्त का व्यासार्द्ध $\overset{\circ}{\text{वि}}$ है उस का मान अनवल्लूत के भुजकोटि रूप में ला सकते हैं और ये भुजकोटि अवल्लूत के भुजकोटि रूप में आ सकते हैं इस प्रकार अनवल्लूत के समीकरण पर से $\overset{\circ}{\text{वि}}$ का ज्ञान हो जायगा फिर स्थिर ग के वश से चाप का मान भी विदिति हो जायगा ।

जैसे यदि उस परवलय को अनवल्लूत कल्पना करो जिसका $r^2 = ४अय$ यह समीकरण है तो चलनकलन के १७८ प्रक्रम के (१) उदाहरण से अवल्लूत का समीकरण $२७ अ \overset{\circ}{\text{र}}^2 = ४(\overset{\circ}{\text{य}} - २अ)^2$ और $\overset{\circ}{\text{वि}} = २अ \left[\frac{\overset{\circ}{\text{य}} + अ}{३अ} \right]^{\frac{३}{२}}$

यह होगा इस लिये $\overset{\circ}{\text{चा}} \pm २अ \left[\frac{\overset{\circ}{\text{य}} + अ}{३अ} \right]^{\frac{३}{२}} = \overset{\circ}{\text{ट}}$ । यहाँ चाप की गणना यदि उस बिन्दु से करें जिस का $\overset{\circ}{\text{भु}} = \overset{\circ}{\text{य}} = २अ$ अर्थात् उस बिन्दु से जो कि परवलय के शिरोबिन्दु के सजातीय है तो क्षेत्र के देखने से विदित होता है कि वहाँ $\overset{\circ}{\text{चा}} = ०$ इस लिये

$\overset{\circ}{\text{ट}} = -२अ$ ऋण चिह्न ग्रहण करने से क्योंकि यहाँ ज्यों ज्यों $\overset{\circ}{\text{य}}$ बढ़ेगा त्यों त्यों $\overset{\circ}{\text{चा}}$ भी बढ़ेगा इसलिये $\overset{\circ}{\text{चा}} = २अ \left[\frac{\overset{\circ}{\text{य}} + अ}{३अ} \right]^{\frac{३}{२}} - २अ$

यदि यहाँ वक्र के $२७अ\overset{\circ}{\text{र}}^2 = ४(\overset{\circ}{\text{य}} - २अ)^2$ इस समीकरण पर से $\frac{\overset{\circ}{\text{ताचा}}}{\overset{\circ}{\text{ताय}}}$ का मान जान कर चलज्ञान से चाप का आनयन करो तो भी ऊपर आया हुआ मान आजायगा ।

९१। वक्र के भुज कोटि के रूप में यदि चाप का मान विदित हो तो उस के अनवल्लूत का समीकरण जान सकते हैं ।

चलनकलन के १७६ प्रक्रम के (२) समीकरण से

$$\frac{\overset{\circ}{\text{ताय}}}{\overset{\circ}{\text{य}} - \overset{\circ}{\text{य}}} = \pm \frac{१}{\overset{\circ}{\text{वि}}} \cdot \frac{\overset{\circ}{\text{ताचा}}}{\overset{\circ}{\text{ताय}}} \text{ जहाँ } \overset{\circ}{\text{य}} \text{ अनवल्लूत का भुज है}$$

$$\text{समशोधनादि से } \overset{\circ}{\text{य}} = \overset{\circ}{\text{य}} \mp \overset{\circ}{\text{वि}} \frac{\overset{\circ}{\text{ताय}}}{\overset{\circ}{\text{ताचा}}} \dots \dots \dots (१)$$

$$\text{इसी तरह } \overset{\circ}{\text{र}} = \overset{\circ}{\text{र}} \mp \overset{\circ}{\text{वि}} \frac{\overset{\circ}{\text{तार}}}{\overset{\circ}{\text{ताचा}}} \dots \dots \dots (२)$$

यदि चा, य और र के रूप में विदित हो और वक्र का समीकरण जानते हों तो $\frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} = \frac{\text{चा}}{\text{य}}$ और $\frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} = \frac{\text{चा}}{\text{य}}$ जान सकते हैं और वि, चा \pm वि = ट इस समीकरण समीकरण पर से जान जायेंगे फिर इन का उत्थापन (१) और (२) में देने से अनवलून का भुज कोटि जान जायेंगे ।

जैसे किसी कानन्वली (The Catenary) का समीकरण

$$r = \frac{g}{\epsilon} \left(\frac{y}{g} + \epsilon - \frac{y}{g} \right)$$

और
$$चा = \frac{g}{\epsilon} \left(\frac{y}{g} - \epsilon - \frac{y}{g} \right)$$
 यह है ।

यहाँ मान लें कि चाप की गणना उस बिन्दु से है जिस का भु = य = ० और को = र = ग अब इन पर से कानन्वली के अनवलून (Involute) का समीकरण जान जायेंगे जिस की प्रवृत्ति वक्र के निर्दिष्ट बिन्दु (जिस के भुज कोटि का मान अभी मान लिया है) के वश से होगी ।

अब ऊपर के र और चा के मान से

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{g}{\epsilon} \left(\frac{y}{g} - \epsilon - \frac{y}{g} \right) = \frac{चा}{g}$$

$$\frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} = \frac{g}{\epsilon} \left(\frac{y}{g} + \epsilon - \frac{y}{g} \right) = \frac{r}{g}$$

भाग देने से

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताचा}} = \frac{चा}{r}, \text{ और } \frac{\text{ताय}}{\text{ताचा}} = \frac{g}{r}$$

और यहाँ ऐसी ही कल्पना किया है कि चा = ० तो वि = ० इस लिये स्थिराङ्क शून्य होगा । तब चा = वि ।

इन का उत्थापन (१) और (२) में देने से

$$y = चा - \frac{चा \cdot g}{r}, \text{ र} = r - \frac{चा^2}{r} = \frac{r^2 - चा^2}{r} = \frac{g^2}{r}$$

$$\text{और } चा = \sqrt{(r^2 - g^2)} = \sqrt{\left[\frac{g^2}{r^2} - g^2 \right]} = \frac{g}{r} \sqrt{g^2 - r^2}$$

इस लिये $\frac{चा}{र} = \frac{\sqrt{(ग^2 - र^2)}}{ग}$, इस तरह से $य = य + \sqrt{(ग^2 - र^2)}$ इस का

उत्थापन वक्र के समीकरण में देने से

$$र = \frac{ग}{२} \left(इ \frac{य}{ग} + इ \frac{य}{ग} \right)$$

$$इस लिये $\sqrt{(र^2 - ग^2)} = \frac{ग}{२} \left(इ \frac{य}{ग} - इ \frac{य}{ग} \right)$$$

$$जोड़ देने से $र + \sqrt{(र^2 - ग^2)} = ग इ \frac{य}{ग}$$$

$$लघुरिक्त लेने से $य = ग ला \frac{र + \sqrt{(र^2 - ग^2)}}{ग}$$$

$$इसी तरह $य + \sqrt{(ग^2 - र^2)} = ग ला \frac{ग + \sqrt{(ग^2 - र^2)}}{र}$$$

इस वक्र को अङ्गरेजी में (Tractory) कहते हैं हमने इस का नाम व्रीतर रखा है । इस में यदि $ग > र$ तो मूल का मान द्विविध आवेगा प्रत्येक $य$ के मान में । ये दोनों मान संख्या में तुल्य परन्तु भिन्न चिह्न के होंगे । चलनकलन से यदि इस की आकृति बनावो तो जान पड़ेगा कि जहाँ $य = ०$ और $र = ग$ वहाँ वक्र को एक स्कन्ध होगा जिस में $य$ अक्ष असीमपथ होगा ।

९२ । यदि अवलूत के चाप का मान अक्षीय भुजयुग्म का फल हो तो ऊपर की युक्ति से अनवलूत का समीकरण भी अक्षीय भुजयुग्म सम्बन्धी जान सकते हो ।

चलनकलन के १७७ प्रक्रम के (१) और (२) समीकरण से

$$श्रु^३ = श्रु^२ + वि^२ - २ ल \cdot वि \dots \dots \dots (१)$$

$$ल^३ = श्रु^३ - ल^३ \dots \dots \dots (२)$$

यहाँ भी पहले के ऐसा स्वरविशिष्टवर्ण ज्ञात वक्र के हैं अर्थात् अवलूत के और केवल वर्ण अनवलूत के हैं । अवलूत तो ज्ञात ही है और इसी लिये ल, और श्रु का भी सम्बन्ध विदित ही होगा और चा \mp वि = ट इसलिये यदि चा का मान ल श्रु के रूप में आ सके तो इस के वश से (१) और (२) में श्रु, ल को उड़ा सकोगे और एक समीकरण ल और श्र में सम्बन्ध दिखाने वाला अनवलूत का ज्ञात हो जायगा ।

जैसे समाश्रिक सर्पिल (Equiangular Spiral) में (चलनकलन का २८६ प्रक्रम का (२) वक्र देखो) यदि $भ = स्प$ क तो

$$ल = थ्रु' ज्याभ$$

यहाँ यदि अनवलृत की प्रवृत्ति सर्पिल के ध्रुवविन्दु ही से मानें और उसी विन्दु से यदि चा के गणना का भी आरम्भ करें तो $वि = चा = थ्रु' छेभ$ (८१वाँ प्रक्रम देखो) इस का उत्थापन (१) में देने से

$$थ्रु' = थ्रु' + थ्रु' \cdot छे' भ - २थ्रु' ल छेभ$$

$$= थ्रु' \cdot छे' भ + थ्रु' \cdot ज्या' भ + ल - २थ्रु' ल \cdot छेभ । (२) से$$

इस वर्गसमीकरण पर से

$$ल - थ्रु' \cdot छेभ = + थ्रु' \cdot कोज्याभ$$

यदि यहाँ धन चिह्न ग्रहण करें तो $ल = \frac{थ्रु'(१ + कोज्या' न)}{कोज्याभ}$ और (२) से

$$थ्रु' = \frac{१ + ३कोज्या' भ}{कोज्या' भ} थ्रु' \text{ इस पर से } थ्रु' \frac{ताथ्रु}{ताल} = वि$$

$$= \frac{१ + ३कोज्या' भ}{कोज्याभ(१ + कोज्या' भ)} थ्रु'$$

परन्तु वक्र के समीकरण से $वि = थ्रु' \cdot छेभ$ इस लिये धन चिह्न ग्रहण करने से मान असम्भव आता है। इस लिये ऋण चिह्न लेकर क्रिया करने से

$$ल = \frac{थ्रु' ज्या' भ}{कोज्याभ} \text{ और तब (२) से } थ्रु' = \frac{थ्रु' ज्या' भ}{कोज्या' भ} \therefore थ्रु' = \frac{थ्रु' कोज्याभ}{ज्याभ}$$

इस का उत्थापन ल में देने से $ल = थ्रु' ज्याभ$ । देखो यह अनवलृत का समीकरण ठीक अवलृत ही के समीकरण के ऐसा है।

९३। यदि वक्र के स्पर्शरेखा से और वक्रस्थ नियतविन्दु की स्पर्शरेखा से उत्पन्न कोण जो हो उस के फल रूप में चाप का मान जानना हो तौ भी $\frac{ताथ्रु}{ताल}$ का मान उस स्पर्शरेखा के फल रूप में जान कर चाप का मान जान सकते हो।

जैसे मानो कि किसी वक्र का समीकरण $र = फ(य)$ मूल विन्दु वक्र ही के चाप का कोई विन्दु है और उसी विन्दु पर $र$ अक्ष स्पर्शरेखा भी है तो वक्र के समीकरण से $\frac{ताथ्रु}{ताल} = फ'(य) = स्पव = \frac{१}{स्पव}$ (चलनकलन

के ११६ वें प्रक्रम से) जहाँ v , r अक्ष और वक्र की स्पर्शरेखा से उत्पन्न कोण का मान है ।

अब ऊपर के समीकरण से $स्पव_2$ के फल रूप में y का मान जान जावोगे मानो कि $y = फा (स्पव_2)$ तो

$$\frac{ताय}{ताव_2} = फा (स्पव_2) छेँ व_2$$

$$\text{और } \frac{ताचा}{ताय} = कोछेँ व_2$$

$$\text{इस लिये } \frac{ताचा}{ताव_2} = फा (स्पव_2) छेँ व_2 \text{ कोछेँ व_2}$$

इस समीकरण पर से v_2 के फल रूप में चा का मान जान सकते हो यदि वक्र के एक बिन्दु पर y अक्ष स्पर्श रेखा हो और उसी नियत बिन्दु से चाप का मान जानना हो तो ऊपर ही की युक्ति से समीकरण बना सकते हो केवल v_2 के स्थान में v को लेना होगा ।

जैसे चक्रालद (Cycloid) में (चलनकलन के २८६ प्रक्रम का (११) वक्र देखो)

$$\frac{तार}{ताय} = \sqrt{\frac{२अ-य}{य}} = \frac{१}{स्पव_2} \quad ।$$

$$\text{इस लिये } \frac{२अ}{य} = \frac{१}{ज्याँ व_2} \text{ और } य = २अज्याँ व_2$$

$$\frac{ताय}{ताव_2} = ४अज्याँ व_2 कोज्याँ व_2$$

$$\frac{ताचा}{ताव_2} = कोछेँ व_2, \quad \frac{ताय}{ताव_2} = ४अकोज्याँ व_2$$

$$\text{इस लिये चा} = ४अज्याँ व_2 + स्थि$$

यदि चाप की गणना उस बिन्दु से करें जहाँ r अक्ष स्पर्शरेखा है तो स्थिराङ्क शून्य होगा ।

इस प्रकार से वक्र के दो स्पर्शरेखाओं से उत्पन्न कोण और वक्र के चाप के बीच सम्बन्ध दिखाने वाले समीकरण को वक्र का चापस्पर्शिक समीकरण कहते हैं ।

९४। यदि वक्र का चापस्पर्शिक समीकरण दिया हो तो उस पर से साधारण वक्र का समीकरण विपरीत क्रिया से जान सकते हैं ।

क्योंकि चापस्पर्शिक समीकरण पर से जानते हैं कि

$$\frac{\text{ताव}}{\text{ताचा}} = \text{ज्याव};$$

इसलिये $y = \int \text{ज्याव} \cdot \text{ताचा}$

और इसी तरह $r = \int \text{कोज्याव} \cdot \text{ताचा}$

चापस्पर्शिक समीकरण से जानते हैं कि चा कोई व_r का फल है इसलिये य, और r का मान ऊपर के चलज्ञान से आजायगा ।

जैसे (१) चक्रालद् (Cycloid) में जानते हैं कि चापस्पर्शिक समीकरण चा = ४अज्याव_r, यह है

इसलिये ताचा = ४अकोज्याव_r, ताव_r

इस का उत्थापन य के मान में देने से

$y = \int \text{ज्याव} \cdot \text{ताचा} = ४अ \int \text{ज्याव} \cdot \text{कोज्याव} \cdot \text{ताव} \cdot \text{ताचा}$

= स्थि—अकोज्याव_r इसी तरह, $r = \int \text{कोज्याव} \cdot \text{ताचा}$

= ४अ $\int \text{कोज्याव} \cdot \text{ताव} \cdot \text{ताचा} = \text{स्थि} + २अव_r + अज्या२व_r,$

इस लिये यहाँ दोनों समीकरणों पर से य वा r के फल रूप में व_r, ज्याव_r, कोज्याव_r का मान ले आने से य और r के सम्बन्ध पर से वक्र का समीकरण आजायगा ।

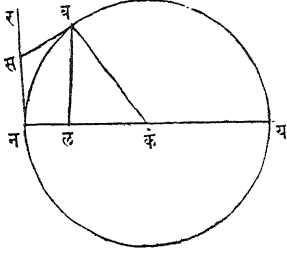
यदि दोनों अक्षों का योगविन्दु वक्र का शिरः स्थान मानें तो स्थि = अ और स्थि_r = ०

(२) इसी तरह वृत्त का चापस्पर्शिक समीकरण चा = अ·व_r, यह है इस पर से ताचा = अताव_r,

और $y = \int \text{ज्याव} \cdot \text{ताचा} = अ \int \text{ज्याव} \cdot \text{ताव} \cdot \text{ताचा} = — अकोज्याव_{r} + \text{स्थि}}$

इसी तरह $r = \int \text{कोज्याव} \cdot \text{ताचा} = अ \int \text{कोज्याव} \cdot \text{ताव} \cdot \text{ताचा}$

= अज्याव_r + स्थि_r यदि नियत स्पर्शरेखा और व्यासार्द्ध के योगविन्दु ही को मूलस्थान मानें तो स्थि = अ और स्थि_r = ० इन का उत्थापन देकर य और r के सम्बन्ध से समीकरण $r^2 = अ^2 — (अ—य)^2$ ।



जैसे यदि न विन्दुगत स्पर्शरेखा नस को नियत स्पर्शरेखा मानो और किसी व विन्दु की स्पर्शरेखा बस तो $\angle वसर = व_१$ और वृत्त के धर्म से $व_१ = \angle वकेन$ । के को केन्द्र समझो इस लिये $नव = चा = अ \cdot व_१$ (जहाँ अ = केन = वृत्तव्यासार्द्ध) । इस लिये यदि नसर को र,

अक्ष और नकेय को य अक्ष । और न को मूलविन्दु मानो तो व विन्दु की कोटि = $वल = र = \sqrt{अ^२ - (अ - य)^२}$ यही समीकरण पहले भी सिद्ध हुआ था ।

(३) इसी तरह चलनकलन के २८६ प्रक्रम के (१३) वक्र अपचक्रालद (Epicycloid) के लक्षण से यदि अ को नियतविन्दु मानो उसी स्पर्शरेखा य अक्ष ही है इस लिये इस अक्ष को नियत स्पर्शरेखा मान लेने से चाप-स्पर्शिक समीकरण से

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{कोज्या}\phi - \text{कोज्या}\frac{अ+क}{क}\phi}{\text{ज्या}\frac{अ+क}{क}\phi - \text{ज्या}\phi} = \text{स्पव}_१$$

$$= \frac{२ज्या\frac{अ+२क}{२क}\phi - ज्या\frac{अ}{२क}\phi}{२ज्या\frac{अ}{२क}\phi - \text{कोज्या}\frac{अ+२क}{२क}\phi} = \text{स्प}\frac{अ+२क}{२क}\phi$$

इस लिये $व_१ = \frac{अ+२क}{२क}\phi$

और ८२ प्रक्रम से

$$\text{चा} = -\frac{\sqrt{(ग^२ - अ^२)}}{अ} \sqrt{ग^२ - श्रु^२} + स्थि$$

परन्तु वक्र के लक्षण से

$$य^२ = (अ + क)^२ \text{कोज्या}^२\phi - २(अ + क) क \text{कोज्या}\phi \text{कोज्या}\frac{अ+क}{क}\phi + क^२ \text{कोज्या}^२\frac{अ+क}{क}\phi$$

$$र^२ = (अ + क)^२ \text{ज्या}^२\phi - २(अ + क) क \text{ज्या}\phi \text{ज्या}\frac{अ+क}{क}\phi + क^२ \text{ज्या}^२\frac{अ+क}{क}\phi$$

$$\text{श्रु}^२ = य^२ + र^२ = (अ + क)^२$$

$$- २क (अ + क) \left\{ \text{ज्या}\frac{अ+क}{क}\phi \text{ज्या}\phi + \text{कोज्या}\frac{अ+क}{क}\phi \text{कोज्या}\phi \right\} + क^२$$

$$ग^२ = (अ + २क)^२ = अ^२ + ४अक + ४क^२$$

$$\begin{aligned} \text{ग} - \text{श्रु} &= २अक + २क + २क (अ + क) कोज्या - \frac{अ}{क} प \\ &= २क (अ + क) \left\{ १ + कोज्या - \frac{अ}{क} प \right\} = ४क(अ + क) कोज्या - \frac{अ}{२क} प \end{aligned}$$

$$\sqrt{\text{ग} - \text{श्रु}} = \sqrt{४क (अ + क) कोज्या - \frac{अ}{२क} प}$$

$$\text{और } \sqrt{\text{ग} - \text{अ}} = \sqrt{४क (अ + क)}$$

चाप में इन का उत्थापन देने से

$$\begin{aligned} \text{चा} &= -४क (अ + क) कोज्या - \frac{अ}{२क} प + स्थि \\ &= \frac{४क (अ + क)}{अ} \left(१ - कोज्या - \frac{अप}{२क} \right) \end{aligned}$$

यदि चाप की गणना वहाँ से करें जहाँ $प = ०$

$$\text{परन्तु } प = \frac{२कव_१}{अ + २क} \text{ इस लिये चा} = \frac{४क(अ + क)}{अ} \left[१ - कोज्या - \frac{अव_१}{अ + २क} \right]$$

$$\text{यदि यहाँ } व_१ = \frac{४क(अ + २क)}{२अ} + व_२$$

$$\text{तो } \frac{अव_१}{अ + २क} = \frac{४क}{२अ} + \frac{अव_२}{अ + २क} \therefore कोज्या \frac{अव_१}{अ + २क} = -ज्या \frac{अव_२}{अ + २क}$$

$$\text{इस लिये यदि } \frac{४क(अ + क)}{अ} ज्या \frac{अव_२}{अ + २क} = चा \text{ तो}$$

$$\text{चा} = \frac{४क(अ + क)}{अ} + चा$$

यहाँ स्पष्ट है कि वक्र के उच्च स्थान से यदि चा की गणना करें तो

$$\text{चा} = \frac{४क(अ + क)}{अ} ज्या \frac{अव_१}{अ + २क}$$

यहाँ स्वर चिह्न का कुछ भी प्रयोजन नहीं यदि उच्चगत स्पर्शरेखा को नियत स्पर्शरेखा मान लें क्योंकि उस से और इष्टस्पर्शरेखा से उत्पन्न कोण तब $व_१$ यही होगा

इसलिये उच्चस्थान से गणना करने में

$$\text{चा} = \frac{४क(अ + क)}{अ} ज्या \frac{अव_१}{अ + २क} ।$$

इसी तरह अतिचक्रालद (Hypocycloid) में नीचस्थान से यदि चाप गणना करो तो चा = $\frac{४क(अ - क)}{अ} ज्या \frac{अव_१}{अ - २क}$ यह समीकरण होगा ।

दोनों समीकरणों का रूप चा = τ ज्यानव, ऐसा कह सकते हो

प्रथम में $\tau = \frac{४क(अ + क)}{अ}$, $n = \frac{अ}{अ + २क} < १$ और दूसरे में

$$T = \frac{r(a-k)}{a}, n = \frac{a}{a-k} \quad \text{१ इतना ही विशेष है ।}$$

(५) कातन्वली का समीकरण यदि

$$r + g = \frac{g}{h} \left(\frac{y}{g} + h - \frac{y}{g} \right) \text{ ऐसा मानें जिस में } r \text{ अक्ष और वक्र के योग}$$

विन्दु को मूल मानें तो

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{g}{h} \left[\frac{y}{g} - h - \frac{y}{g} \right] \quad \text{चा} = \frac{g}{h} \left[\frac{y}{g} - h - \frac{y}{g} \right]$$

इस लिये मूलविन्दुगत स्पर्शरेखा से इष्टस्पर्शरेखा जो कोण बनावे उसे α कहो तो चा = $g \cdot \text{स्प.व.}$ ऐसा होगा । इस प्रकार से कातन्वली (Catenary) का चापस्पर्शिक समीकरण उत्पन्न हो गया ।

१५। यदि चापस्पर्शिक समीकरण से वक्रजातीय वृत्त का व्यासार्द्ध ले आवें तो चलनकलन के १७१ वें प्रक्रम से

$$वि = \frac{\text{ताचा}}{\text{ताव}} \text{ (जहाँ } b = व.) \text{ ऐसा होगा ।}$$

जैसे लाघुरिक्थिक सर्पिल में ८१ प्रक्रम से

$$\text{चा} = \text{श्रु} \sqrt{क^2 + १} \quad \text{यदि ध्रुव स्थान से चाप गणना करें}$$

$$= \text{श्रु} \cdot \text{छेभ} \quad \text{और चलनकलन के १३१ वें प्रक्रम से}$$

$$ल = \text{श्रु} \cdot \text{ज्याभ} \quad \therefore \frac{\text{ताल}}{\text{ताश्रु}} = \text{ज्याभ} \text{ इसलिये चलनकलन के १६८ वें प्रक्रम से}$$

$$वि = \text{श्रु} \cdot \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताल}} = \text{श्रु} \cdot \frac{१}{\text{ज्याभ}}$$

$$वि का भाग चा में देने से $\frac{\text{चा}}{\text{वि}} = \text{ज्याभ} \cdot \text{छेभ} = \text{स्थि}$ इस से सिद्ध होता$$

है कि लाघुरिक्थिक सर्पिल में चाप और वक्रजातीय वृत्त के व्यासार्द्ध में स्थिर सम्बन्ध है । मानो कि वि = चा · त जहाँ त कोई स्थिराङ्क है तो

$$वि = चा \cdot त = \frac{\text{ताचा}}{\text{ताव}} \text{ इसलिये ताव } त = \frac{\text{ताचा}}{\text{चा}}$$

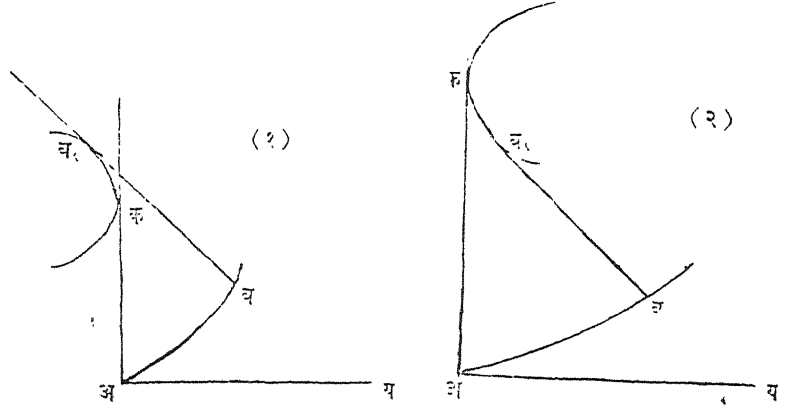
$$\text{चलानयन से } त \cdot व + \text{स्थि} = \text{लाचा}$$

$$\text{इसलिये चा} = अ \text{ इत्.व. जहाँ } अ \text{ कोई स्थिराङ्क है}$$

$$\text{यदि चा} = चा + अ \quad \text{तो चा} = अ (\text{इत्.व.} - १)$$

अब इस में चा वहाँ से परिगणित है जहाँ $व = ०$

९६। यदि वक्र का चापस्पर्शिक समीकरण ज्ञात हो तो उस के अवलूत का भी समीकरण जान सकते हैं



कल्पना करो कि अब एक वक्र है जिस के अवलूत की आकृति कब_r है। मान लो कि अब चाप (चा) की गणना वक्र के किसी नियत बिन्दु से ब की ओर है।

और कब_r चाप (चा) की गणना वक्र के किसी नियत बिन्दु से ब_r की ओर है तो यदि अ बिन्दु पर अब वक्र की जो स्पर्शरेखा अय है उसी को नियत स्पर्शरेखा मान अब का चापस्पर्शिक समीकरण बनावें और क बिन्दु से इस पर जो कअ लम्ब डाला गया इस को नियत स्पर्शरेखा मान कर यदि कब_r का चापस्पर्शिक समीकरण बनायें तो अवलूत और अनवलूत के लक्षण से स्पष्ट है कि दोनों समीकरणों में ब_r का एक ही मान रहेगा।

$$\text{इस लिये (१) क्षेत्र में चा} = \text{वि} - \text{स्थि} = \frac{\text{ताचा}}{\text{ताब}_r} - \text{स्थि}$$

$$\text{और (२) क्षेत्र में चा} = \text{स्थि} - \text{वि} = \text{स्थि} - \frac{\text{ताचा}}{\text{ताब}_r}$$

इस लिये यदि चा का मान ब_r के फलरूप में हो तो चा का मान भी ब_r के कोई फलरूप में जान सकते हैं जहाँ जब चा = ० तब वक्रजातीय वृत्त का जो व्यासार्द्ध होगा वही स्थि का मान है।

जैसे चक्रालद में जानते हैं कि चा = ४अज्याष

$$\text{इस लिये चा} = \text{स्थि} - \frac{\text{ताचा}}{\text{ताब}_r} = \text{स्थि} - ४अकोज्याष ।$$

इस में यदि $v_1 = \dot{v}_1 + \frac{v_1}{r_1}$ और $\dot{c}_1 = \dot{\theta} + \text{स्थि}$ ऐसा कल्पना करें तो $\dot{\theta} = \frac{v_1}{r_1} + \dot{c}_1$ अर्थात् यह भी एक चक्रालद ही हुआ ।

इसलिये चक्रालद का अवलूत एक चक्रालद ही है ।

इसी प्रकार इस प्रक्रम की विपरीत क्रिया से यदि किसी वक्र का चापस्पर्शिक समीकरण ज्ञात हो तो उस के अनवलूत का चापस्पर्शिक समीकरण जान सकते हैं । क्योंकि ऊपर के प्रक्रम से सिद्ध है कि

$$\frac{\text{ताचा}}{\text{ताव}_1} = \text{स्थि} \pm \dot{c}_1$$

$$\text{इसलिये } \dot{c}_1 = \int (\text{स्थि} \pm \dot{c}_1) \text{ताव}_1$$

इसलिये यदि \dot{c}_1 का मान v_1 के फल रूप में हो तो \dot{c}_1 का मान भी v_1 के कोई फल रूप में ला सकते हैं ।

जैसे वृत्त में जानते हैं कि $\dot{c}_1 = \frac{v_1}{r_1}$ इसलिये

$$\dot{c}_1 = \int (\text{स्थि} \pm \frac{v_1}{r_1}) \text{ताव}_1 = \text{स्थि } v_1 \pm \frac{v_1^2}{2r_1} + \text{स्थि}_1$$

यदि \dot{c}_1 की प्रवृत्ति वहाँ से हो जहाँ $v_1 = 0$ तो $\text{स्थि}_1 = 0$ । और अवलूत और अनवलूत के योग विन्दु ही से यदि \dot{c}_1 की गणना करें तो $\text{स्थि} = 0$ ऐसी स्थिति में

$\dot{c}_1 = \frac{v_1^2}{2r_1}$ । (चलनकलन के १७८ वें प्रक्रम का (५) उदाहरण देखें और फ के स्थान में v_1 को मान लें)

ऊपर कहे हुए प्रक्रम की युक्ति से अवलूत का अवलूत उस का अवलूत यों अवलूतों की परम्परा वा अनवलूत का अनवलूत उसका अनवलूत यों अनवलूतों की परम्परा सहज में जान सकते हैं ।

विद्यार्थियों को चाहिये कि चापस्पर्शिक समीकरण पर से वक्रों की आकृति निकाल अच्छी तरह अभ्यास करें । परन्तु चाहिये कि ऐसा वक्र लें जिस की आकृति चक्रालद के ऐसी प्रसिद्ध हो ।

१७। चाप पर से विपरीत क्रिया से वक्र के भुज कोटि का ज्ञान ।

कल्पना करो कि $\dot{c}_1 = f(y)$ तो

$$f'(y) = \frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} = \sqrt{१ + \frac{\text{तार}}{\text{ताय}}}$$

$$\text{इस लिये } \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \sqrt{[f'(y)]^2 - १}$$

$$\text{और } r = \int [[f'(y)]^2 - १]^{\frac{१}{२}} \text{ताय}$$

जैसे (१) कल्पना करो कि चा = फ(य) = गय

$$\text{इसलिये } f'(y) = ग$$

$$\text{और } r = \int [[f'(y)]^2 - १]^{\frac{१}{२}} \text{ताय} = \int (ग^2 - १)^{\frac{१}{२}} \text{ताय} = य \sqrt{ग^2 - १} + \text{स्थि}$$

यदि $r' = ग - \text{स्थि}$ तो वक्र का समीकरण $r' = य \sqrt{ग^2 - १}$

$$(२) \text{ चा} = \text{फ}(य) = \sqrt{\frac{ग}{य}} \text{ तो } f'(y) = \left(\frac{ग}{य}\right)^{\frac{१}{२}}$$

$$\begin{aligned} \text{इस लिये } r &= \int \left[\left(\frac{ग}{य}\right)^{\frac{१}{२}} - १ \right]^{\frac{१}{२}} \text{ताय} = \int \frac{(ग-य)\text{ताय}}{\sqrt{(गय-य^2)}} = \int \frac{\left(\frac{ग}{२}-य\right)\text{ताय}}{\sqrt{(गय-य^2)}} \\ &+ \frac{ग}{२} \int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{(गय-य^2)}} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{(गय-य^2)} + \frac{ग}{२} \text{उज्या}^{-१} \frac{य}{ग} + \text{स्थि}$$

यदि $r' = ग - \text{स्थि}$ तो चलनकलन के २८६ प्रकम के (११) वक्र, चक्रालद का समीकरण यह है ।

$$(३) \text{ चा} = \text{फ}(य) = \frac{अ}{य} \text{ तो } f'(y) = \frac{अ}{य^2}$$

$$\text{यहाँ } r = \int \sqrt{\left[\frac{अ}{य^2} - १\right]} \text{ताय} = \int \frac{(अ-य^2)\text{ताय}}{य\sqrt{(अ-य^2)}}$$

$$= \int \frac{अ\text{ताय}}{य\sqrt{(अ-य^2)}} - \int \frac{य\text{ताय}}{\sqrt{(अ-य^2)}}$$

$$= अ \frac{य}{अ + \sqrt{(अ-य^2)}} + \sqrt{(अ-य^2)} + \text{स्थि}$$

इस तरह से अनेक उदाहरण का उत्तर निकाल सकते हो ।

इस तरह विद्यार्थियों को चाहिये कि पूर्व प्रकर्मों में लिखे हुए सिद्धान्तों का अच्छी तरह अभ्यास कर प्रश्न का उत्तर निकालें ।

९८। यदि आकाश में कोई वक्र हो जिस का समीकरण भुज, कोटि और शङ्कु से बनता हो अर्थात् तीन धरातलों के सम्बन्ध से समीकरण हो तो गोल-

युक्ति से यदि क्षितिज, पूर्वापर और याम्योत्तरवृत्त ये तीनों धरातलों को क्रम से मान लें और आकाशीय बिन्दु को ग्रह कल्पना करें तो इस ग्रह का ज्ञान याम्योत्तरीय भुज = य, पूर्वापरीयकोटि = र और दृग्मण्डलीयशङ्कु = ल के ज्ञान से हो जायगा ।

यदि किसी नियत बिन्दु से ग्रह के गमन दिशा से जो वक्र हुआ उस के चाप का मान = चा मानें और जब भु = य + Δ य, को = र + Δ र और ल = ल + Δ ल कल्पना करें और उस समय में चाप = चा + Δ चा मानो तो गोलयुक्ति से Δ चा = $\sqrt{(\Delta\text{य})^2 + (\Delta\text{र})^2 + (\Delta\text{ल})^2}$

Δ य का भाग देकर Δ य के स्थान में शून्य का उत्थापन देने से

$$\frac{\text{चाचा}}{\text{ताय}} = \sqrt{1 + \left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right)^2 + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}\right)^2} \text{ ऐसा होगा ।}$$

इसी प्रकार

$$\frac{\text{चाचा}}{\text{तार}} = \sqrt{1 + \left(\frac{\text{ताय}}{\text{तार}}\right)^2 + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{तार}}\right)^2}$$

$$\text{और } \frac{\text{चाचा}}{\text{ताल}} = \sqrt{1 + \left(\frac{\text{ताय}}{\text{ताल}}\right)^2 + \left(\frac{\text{तार}}{\text{ताल}}\right)^2}$$

यहाँ वक्र के समीकरणों पर से $\frac{\text{ताय}}{\text{तार}}$, $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$, $\frac{\text{ताल}}{\text{ताल}}$, इत्यादि, य वा र

अथवा ल के फल रूप में आ सकते हैं फिर इन पर से

$$\text{चा} = \int \sqrt{1 + \left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right)^2 + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}\right)^2} \{ \text{ताय} \}$$

$$\text{वा चा} = \int \sqrt{1 + \left(\frac{\text{ताय}}{\text{तार}}\right)^2 + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{तार}}\right)^2} \{ \text{तार} \}$$

$$\text{अथवा चा} = \int \sqrt{1 + \left(\frac{\text{ताय}}{\text{ताल}}\right)^2 + \left(\frac{\text{तार}}{\text{ताल}}\right)^2} \{ \text{ताल} \}$$

इन का ज्ञान हो जायगा ।

इस प्रकार के वक्र को द्विगुण वक्रजातीय वक्र (Curves of double Curvature) कहते हैं

जैसे कल्पना करो कि एक वक्र नीचे लिखे दो समीकरणों से ज्ञान है ।

$$r^2 = 2अय \dots \dots \dots (१)$$

$$ल = \sqrt{(२गय - य^2) + गउज्या^{-१} \frac{य}{ग}} \dots \dots \dots (२)$$

यहाँ दो समीकरणों से वक्र ज्ञान है इस का तात्पर्य ऐसा समझो ।

कल्पना करो कि उदयास्तसूत्र और याम्योत्तर का सम्पात अ है तो अ बिन्दु को मूलबिन्दु, याम्योत्तर सूत्र को य अक्ष और उदयास्त सूत्र को र अक्ष कल्पना करने से (१) समीकरण का परवलय जो क्षितिज के धरातल में उत्पन्न होगा उसको आधार मान उस पर एक समखात ऐसा बनावो जिस का पृष्ठसूत्र सब ऊर्ध्वाधरसूत्र के समानान्तर हो । इसी तरह अ को मूल मान और याम्योत्तर सूत्र को, य अक्ष, ऊर्ध्वाधर सूत्र को र अक्ष के ऐसा ल अक्ष मान याम्योत्तरवृत्त के धरातल में जो (२) समीकरण से चक्रालद् बनेगा इस को आधार मान एक समखात बनावो जिस का सब पृष्ठसूत्र उदयास्त-सूत्र के समानान्तर हों तो ऐसे दो समखातों के आपस में कटने से जो वक्र की आकृति होगी वही वक्र ऊपर के दोनों समीकरणों में अपेक्षित है ।

$$\text{इस लिये यहाँ } \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \sqrt{\frac{\text{अ}}{\text{य}}}, \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} = \sqrt{\left(\frac{२ग-य}{ग}\right)}$$

$$\begin{aligned} \text{और } \frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} &= \sqrt{\left\{ १ + \left[\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right]^२ + \left[\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}\right]^२ \right\}} = \sqrt{\left(१ + \frac{\text{अ}}{\text{य}} + \frac{२ग-य}{ग} - १\right)} \\ &= \sqrt{\left(\frac{२ग+अ}{य}\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{इसलिये चा} &= \int \sqrt{\left(\frac{२ग+अ}{य}\right)} \text{ताय} = \sqrt{२ग+अ} \int \text{ताय} \text{य}^{-३/२} \\ &= २\sqrt{(२ग+अ)} \sqrt{\text{य}} \end{aligned}$$

यदि मूल बिन्दु से चाप की गणना करें तो स्थिराङ्क की कुछ आवश्यकता नहीं ।

९९। इसी तरह यदि य, र, और ल किसी "का" चल के फल हों तो चलन-कलन की युक्ति से सिद्ध कर सकते हो कि

$$\frac{\text{ताचा}}{\text{ताका}} = \sqrt{\left\{ \left[\frac{\text{ताय}}{\text{ताका}}\right]^२ + \left[\frac{\text{तार}}{\text{ताका}}\right]^२ + \left[\frac{\text{ताल}}{\text{ताका}}\right]^२ \right\}}$$

$$\text{इस लिये चा} = \sqrt{\left\{ \left[\frac{\text{ताय}}{\text{ताका}}\right]^२ + \left[\frac{\text{तार}}{\text{ताका}}\right]^२ + \frac{\text{ताल}}{\text{ताका}} \right\}} \text{ताका}$$

जैसे यदि य = अकोज्याका, र = अज्याका, ल = ग का

$$\text{तो } \frac{\text{ताय}}{\text{ताका}} = \frac{\text{अज्याका}}{\text{ताका}}, \frac{\text{तार}}{\text{ताका}} = \frac{\text{अकोज्याका}}{\text{ताका}}, \frac{\text{ताल}}{\text{ताका}} = \frac{\text{ग}}{\text{ताका}}$$

$$\text{इस लिये चा} = \int \sqrt{(\text{अज्याका}^२ + \text{अकोज्याका}^२ + \text{ग}^२)} \text{ताका}$$

$$= \int (अ^2 + ग^2)^{3/2} काका = \sqrt{(अ^2 + ग^2)} का + स्थि ।$$

१००। यदि $y = \text{श्रुज्याषकोज्याप}$, $r = \text{श्रुज्याषज्याप}$, $l = \text{श्रुकोज्याप}$

ऐसा अक्षीय समीकरण हो, तो जब वक्र दो समीकरण से विदित है अर्थात् y , r , l में से कोई दो तीसरे के फल हैं तब स्पष्ट है कि $श्रु$, $प$, $प$, इन में भी कोई दो तीसरे के फल होंगे । इस लिये $प$ के वश से

$$\frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} = \text{ज्याषकोज्याप} \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}} + \text{श्रुकोज्याषकोज्याप} - \text{श्रुज्यापज्याप} \frac{\text{ताप}}{\text{ताप}}$$

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताप}} = \text{ज्याषज्याप} \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}} + \text{श्रुकोज्याषज्याप} + \text{श्रुज्यापकोज्याप} \frac{\text{ताप}}{\text{ताप}}$$

$$\frac{\text{ताल}}{\text{ताप}} = \text{कोज्याप} \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}} - \text{श्रुज्याप}$$

$$\begin{aligned} \text{इस लिये } \left[\frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} \right]^2 + \left[\frac{\text{तार}}{\text{ताप}} \right]^2 + \left[\frac{\text{ताल}}{\text{ताप}} \right]^2 \\ = \left[\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}} \right]^2 + \text{श्रु}^2 \text{ज्या}^2 \text{ष} \left[\frac{\text{ताप}}{\text{ताप}} \right]^2 + \text{श्रु}^2 \end{aligned}$$

$$\text{और चा} = \int \sqrt{\left\{ \left[\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}} \right]^2 + \text{श्रु}^2 \text{ज्या}^2 \text{ष} \left[\frac{\text{ताप}}{\text{ताप}} \right]^2 + \text{श्रु}^2 \right\}} \text{ताप}$$

इसी तरह r , और $प$, के वश से

$$\text{चा} = \int \sqrt{\left\{ \text{श्रु}^2 \left[\frac{\text{ताप}}{\text{तार}} \right]^2 + १ + \text{श्रु}^2 \text{ज्या}^2 \text{प} \left[\frac{\text{ताप}}{\text{तार}} \right]^2 \right\}} \text{ताश्रु}$$

$$\text{वा, चा} = \int \sqrt{\left\{ \text{श्रु}^2 \left[\frac{\text{ताप}}{\text{ताप}} \right]^2 + \left[\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}} \right]^2 \text{श्रु}^2 \text{ज्या}^2 \text{प} \right\}} \text{ताप}$$

१०१। इसी तरह अन्तरिक्ष में जो वक्र हो उस के किसी बिन्दु पर जो स्पर्शरेखा हो उस पर मूलबिन्दु से पड़ा लम्ब यदि l कहो तो ७५ प्रक्रम के

$$(६) \text{ समीकरण से चा} = \int \frac{\text{श्रुताश्रु}}{\sqrt{(\text{श्रु}^2 - \text{ल}^2)}} \text{ऐसा होगा ।}$$

यह समीकरण यद्यपि एकधरातलगत वक्र में सिद्ध होता है तथापि जब दो एकधरातलीय वक्रों के योग ही से यह वक्र उत्पन्न हुआ है तब योगबिन्दु में इस में भी यही धर्म रहेगा । अथवा जब चलनकलन से सिद्ध है कि

$$\frac{\text{ताचा}}{\text{ताश्रु}} \frac{\text{श्रु}}{\sqrt{(\text{श्रु}^2 - \text{ल}^2)}} \text{ यह दोनों अन्तरिक्षस्थ वक्र के स्पर्शरेखा और श्रुति से}$$

उत्पन्न कोण की छेदन रेखा है तब $\frac{\text{ताचा}}{\text{ताशु}}$

$$= \frac{\text{शु}}{\sqrt{(\text{शु}-\text{ल})}} \quad \text{चा} = \int \frac{\text{शुताशु}}{\sqrt{(\text{शु}-\text{ल})}} \quad ।$$

अभ्यास के लिये प्रश्न

१। यदि वक्र का समीकरण $x(y+r) - a^2 = 2axr^2$ यह हो तो इस के परिधि का मान बताओ । परि. = $6a^2$

२। सिद्ध करो कि त्रिभुज का चा = \pm गलार्ग + स्थि ।

३। सिद्ध करो कि किसी त्रिच्छेद (Trochoid) का चाप

$$= \text{स्थि} - \int \sqrt{\left\{ (g-k) \text{ज्या } \frac{x}{2} + (g+k) \text{कोज्या } \frac{x}{2} \right\}} \text{ताशु}$$

जहाँ $a = \frac{g-k}{2}$

चलनकलन के २८६ प्रक्रम का (१२) वक्र देखो

४। किसी वक्र में यदि $y = \text{ज्याप}(2p+3p) + \text{कोज्याप}(2+6p)$

$$r = \text{कोज्याप}(2p+3p) - \text{ज्याप}(2+6p)$$

तो सिद्ध करो कि चा = $p^2 + p + 6p + 2$ ।

५। सिद्ध करो कि किसी वक्र में यदि

$$y = \text{ज्यापफ}(p) + \text{कोज्यापफ}(p)$$

$$r = \text{कोज्यापफ}(p) - \text{ज्यापफ}(p)$$

$$\text{तो चा} = \text{फ}(p) + \text{फ}(p) \quad ।$$

६। सिद्ध करो कि यदि वक्र का समीकरण $r = y^2 + 2y$ हो तो यदि मूलविन्दु से चाप की गणना करें तो चा = $y(y^2+2)^{\frac{3}{2}}$ ।

७। $r^2 = ay^2$ इस समीकरण के वक्र का चापस्पर्शिकसमीकरण कैसा होगा ।

$$\text{उ० चा} = \frac{2a}{3} (\text{छेव}_1 - 1) \quad ।$$

८। सिद्ध करो कि परवलय के चापस्पर्शिकसमीकरण में

$$\frac{\text{ताचा}}{\text{ताब}_1} = \frac{2a}{\text{कोज्या}_1 \text{ब}_1} \quad । \text{वा, वा} = \frac{a}{2} \text{ला } \frac{1 + \text{ज्याब}_1}{1 - \text{ज्याब}_1} + \frac{a \text{ज्याब}_1}{1 - \text{ज्याब}_1} \quad ।$$

९। सिद्ध करो कि यदि वक्र का $(y+r)^{\frac{2}{3}} - (y-r)^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \text{अब}$ समीकरण हो तो

$$\text{चा} = \sqrt{\frac{1}{2}} \left\{ (y+r)^{\frac{3}{2}} + (y-r)^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{2}{3}}$$

१०। सिद्ध करो कि अपचक्रालद का अवलूत एक अपचक्रालद ही होगा जिस के स्थिरवृत्त का व्यासार्ध = $\frac{अ}{अ+२क}$ और चलितवृत्त का व्यासार्ध = $\frac{अ.क}{अ+२क}$ होगा ।

११। $\theta^m = a^m \cos^m \theta$ इस समीकरण के वक्र में यदि θ यह कोई अभिन्नसंख्या हो तो चाप का मान जान सकते हैं ।

१२। सिद्ध करो कि यदि वक्र का समीकरण $z^r = \frac{z^y + 1}{z^y - 1}$ ऐसा हो तो $\frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} = \frac{z^y + 1}{z^y - 1}$ होगा ।

१३। यदि वृत्त का व्यासार्ध = १ इस के चाप का प्रमाण = π हो और इसके अनवलूत का चाप = π , अनवलूत के अनवलूत का चाप = π , इस के अनवलूत का चाप = π , इस तरह अनवलूतपरम्पराओं के चाप मान π, π, π इत्यादि मानो तो सिद्ध करो कि

$$\pi + \pi + \pi + \pi + \dots = z^m - 1 \text{ होगा ।}$$

अनवलूत और वृत्त के योग विन्दु से चाप की गणना समझो ।

१४। यदि किसी इलामूलक (The Lamniscate) का $\theta^m = a^m \cos^m \theta$ ऐसा समीकरण हो (चलनकलन के २८६ प्रश्न का (१०) वक्र देखो)

तो सिद्ध करो कि उस के परिधि का मान

$$= 2\pi a \left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots \right) \text{ यह होगा ।}$$

१५। यदि एक विन्दु से दीर्घवृत्त पर दो स्पर्शरेखा खींची जायँ तो दो स्पर्शरेखा दो भुज और उन के अन्तर्गत दीर्घवृत्त का चाप आधार मानो तो दो सरल और एक वक्ररेखा इस से एक त्रिबाहु उत्पन्न हुआ इस त्रिबाहु के अन्तर्गत जो वृत्त बनेगा वह वक्राधार को जहाँ स्पर्श करेगा उस से जो दो भाग वक्राधार के होंगे उन का अन्तर त्रिभुज के दोनों भुजों के अन्तर तुल्य होता है । इसे सिद्ध करो ।

१६। जिस वक्र का $r = \frac{y^2}{2a}$, $l = \frac{y^2}{4a}$ ये समीकरण हैं उस के मूल बिन्दु से चाप का मान बताओ। $उ०$, चा = $y + l$ ।

१७। सिद्ध करो कि यदि वक्र के समीकरण पर से $\left(\frac{tar}{ताय}\right) = 2 \frac{ताल}{ताय}$ तो चा = $y + l + स्थि$ ।

१८। वक्र का एक समीकरण $r = f(y)$ यह दिया हुआ है और यह जानते हैं कि इस के चाप का मान $y + l + स्थि$ यह है तो वक्र का दूसरा समीकरण क्या होगा। $उ०$, $l = \frac{1}{2} \int \{ f(y) \}^2 ताय$ ।

१९। वक्र का एक समीकरण $r = ज्याय$ यह है और इस के चाप का मान = $y + l$ तो दूसरे समीकरण का मान बताओ ।

$$उ० ल = \frac{अ}{2} \left(y + \frac{ज्याय}{2} \right)$$

२०। किसी वक्र में $r = 2\sqrt{अय - य}$, $l = y - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{य^3}{अ}}$ तो चाप का क्या मान होगा। $उ०$ चा = $y + r - ल$

$$२१। यदि वक्र के $\frac{य^2}{अ} - \frac{र^2}{क} = १$, $य = \frac{अ}{३} \left[\sqrt{\frac{३य}{अ}} + \sqrt{\frac{३य}{अ}} \right]$$$

ये समीकरण हों तो चाप का क्या प्रमाण होगा ।

$उ०$, $य$, $र$ अक्ष के धरातल में जहाँ पर वक्र मिला है इस बिन्दु से यदि चाप की गणना करें तो चा = $\frac{(अ^2 + क)^{3/2}}{अ} (य^2 - अ^2)^{3/2}$

२२। ८५ प्रक्रम के (१) क्षेत्र में त बिन्दु पर जो स्पर्शरेखा होगी उस पर न से पड़े लम्ब का मान यदि नल रखो तो सिद्ध करो कि

$$(१) नल \times नल = नअ \times नक । (२) नव + नल^2 = नअ^2 + नक^2 ।$$

२३। एक दीर्घवृत्त के परिधि चतुर्थांश का ऐसा द्विभाग करो कि उनका अन्तर व्यासार्द्धान्तर तुल्य हो ।

८५ प्रक्रम का (१) क्षेत्र देखो यहाँ त और व दोनों एक ही स्थान में हो जायेंगे। और $नल = \sqrt{नअ \times नक}$ और $वल = नअ - नक$

२४। २३ वें प्रश्न में द्विभागकारी विन्दु जो है उस पर दीर्घवृत्त में जो स्पर्शरेखा होगी वह दोनों अक्षों में द्विभागकारी विन्दु से क्रम से व्यासार्द्ध तुल्य अन्तर पर लगेगी अर्थात् र अक्ष में बृहद्व्यासार्द्धतुल्य अन्तर पर और य अक्ष में लघुव्यासार्द्धतुल्य अन्तर पर । इस को सिद्ध करो ।

२५। यदि ८५ प्रक्रम के (१) क्षेत्र में (२२) प्रश्न के अनुसार लम्ब नल डालें तो सिद्ध करो कि बल, तल बढ़ाने से जिस विन्दु पर कटेंगे वह विन्दु दीर्घ वृत्त के उस ऐकनाभिक अतिपरवलय में होगी जो कि (२३) प्रश्न में द्विभागकारी जो विन्दु है उस पर जायगा । यहाँ पर यह भी सिद्ध करो कि अ और क विन्दुगत स्पर्शरेखाओं के योग विन्दु पर भी वह अतिपरवलय जायगा ।

२६। एक ही स्थान से तीन लड़के दौड़े पहला सरल मार्ग में और बाकी दो वक्रमार्ग में । पहला जिस स्थान पर पहुँचता था वहाँ पर यदि उस की गमन दिशा पर लम्ब करें तो यह लम्ब दूसरे और तीसरे के तात्कालिक स्थान पर जाता है । यदि पहला १० कोश चल कर ठहर जाय तो उस समय दूसरा और तीसरा कितना कितना चल चुके होंगे । इस प्रश्न में हम इतना जानते हैं कि किसी समय में पहले से दूसरे के स्थान का अन्तर = $\sqrt{४अय}$, और पहले से तीसरे के स्थान का अन्तर = $अय^{\frac{३}{२}}$ ।

यहाँ किसी समय में पहले के चल चुकने का प्रमाण य है

$$७० \text{ दूसरे का चलना} = \sqrt{१०० + १०अ + \frac{अ}{३}} \left\{ \frac{२० + अ + २\sqrt{१०० + १०अ}}{अ} \right\}$$

$$\text{तीसरे का चलना} = अ \left\{ \left[\frac{४}{२अ^२} + १० \right]^{\frac{३}{२}} - \frac{८}{२७अ^२} \right\}$$

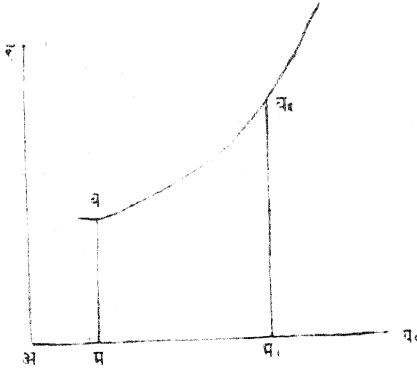
इति षष्ठाध्याय ।

अथ सप्तमाध्याय ।

वक्र क्षेत्रों का फलानयन ।

१०२। जिस वक्र में कोटि, भुज का कोई फल है वहाँ चलनकलन से सिद्ध है कि $\frac{\text{ताफ}}{\text{ताय}} = r$ (चलनकलन का १५६ वाँ प्रक्रम देखो)

इस लिये $f = \int r \text{ ताय}$ इस में कोटि के स्थान में r_2 और r_1 का उत्थापन देकर सान्त चलानयन से



वम म_१ वक्रचतुर्भुज का फल $\int_{r_1}^{r_2} r \text{ ताय}$ यह होगा ।
यहाँ यदि अक्ष तिर्यक् हो तो

यही फल ज्याअ $\int_{r_1}^{r_2} r \text{ ताय}$ ऐसा होगा । यहाँ अ = $\angle r \text{ अय}$ ।

१०३। इस की व्याप्ति के लिये कुछ वक्रों का फलानयन करते हैं ।

केंद्र को मूल मान वृत्त का $r = \sqrt{a^2 - y^2}$ यह समीकरण है इस के फल का मान जानना है ।

यहां १०२ प्रक्रम से $f = \int \sqrt{a^2 - y^2} \text{ ताय}$

$= \frac{y\sqrt{(a^2 - y^2)}}{2} + \frac{a^2}{2} \text{ ज्या}^{-1} \frac{y}{a} + \text{स्थि}$, यदि प्रथम r को r अक्ष में

मिला समझें तो उस समय $y = 0$ होगा और फल भी शून्य इसलिये स्थि = 0 तब फल

$$\int \sqrt{(a^2 - y^2)} \text{ ताय} = \frac{y\sqrt{(a^2 - y^2)}}{2} + \frac{a^2}{2} \text{ ज्या}^{-1} \frac{y}{a} ।$$

इस में यदि $y = a$ तो वृत्त के चतुर्थांश का फल = $\frac{a^2}{2} \times \frac{\pi}{4}$

इस लिये समग्रवृत्तफल = $a \times a^n = a^{n+1} = \frac{2a \times 2a^n}{2} = \frac{2a \times परि}{2}$
 अर्थात् परिधि, व्यास के घात की चौथाई वृत्त का फल होता है। इस को भास्कराचार्य भी जानते थे इन से भी प्राचीन ब्रह्मगुणादिकों ने भी यह जान लिया था। परन्तु इस की उपपत्ति वे लोग नहीं दिखाये।

१०४। दीर्घवृत्त के फल का आनयन ।

यहाँ $r^2 = \frac{k^2}{a^2} (a^2 - y^2)$ इस लिये

$f = \frac{k}{a} \int \sqrt{(a^2 - y^2)}$ ताय । परन्तु १०३ प्रक्रम से $\int \sqrt{(a^2 - y^2)}$ ताय यह अ, व्यासार्द्ध से उत्पन्न वृत्त का फल है इस लिये उस वृत्त का सम्पूर्ण फल जो हो उसे लघुव्यासार्द्ध से गुण कर वृहद्व्यासार्द्ध का भाग देने से दीर्घवृत्त का क्षेत्र फल होता है।

१०५। परवलय के फल का आनयन ।

यहाँ $r^2 = 2ay$ । इस लिये

$$f = \int \sqrt{(2ay)} \text{ ताय} = \frac{2\sqrt{a}}{3} y^{\frac{3}{2}} + \text{स्थि} ।$$

यहाँ यदि $y = 0$ तो $f = 0$ इस लिये स्थि = 0 ।

तब $f = \frac{2\sqrt{a}}{3} \times y^{\frac{3}{2}} \times y = \frac{2y\sqrt{a}}{3}$ अर्थात् भुज और कोटि से जो आयत बने उस का दो तृतीयांश परवलय का फल होता है।

१०६। जिस वक्र का $r = ay^n$ ऐसा समीकरण है उस के फल का आनयन ।

$$यहाँ f = \int ay^n \text{ ताय} = a \int y^n \text{ ताय} = \frac{a \cdot y^{n+1}}{n+1} + \text{स्थि} ।$$

यदि मूल स्थान से फल की प्रवृत्ति मानें तो स्थि = 0 इस लिये

$$f = \frac{a \cdot y^{n+1}}{n+1} = \frac{ay^n \times y}{n+1} = \frac{r \times y}{n+1}$$
 यह फल जानने के लिये ऐसे वक्र में

एक साधारण सिद्धान्त उत्पन्न हो गया। इस में n के स्थान में यदि $\frac{1}{2}$ का उत्थापन दो तो परवलय का फल आ जायगा।

१०७। अतिपरवलय के फल का आनयन ।

केन्द्र को मूल मानने से इस का समीकरण $r = \frac{k}{a} \sqrt{(y^2 - a^2)}$

इस लिये $f = \frac{k}{a} \int \sqrt{(y^2 - a^2)} \text{ ताय}$

$$= \frac{k}{a} \left\{ \frac{y\sqrt{(y^2 - a^2)}}{2} - \frac{a^2}{2} \text{ ला } (y + \sqrt{(y^2 - a^2)}) \right\} + \text{स्थि}$$

यदि $y = a$ तो $f = 0$ इस लिये

$$0 = \frac{k}{a} \left\{ -\frac{a^2}{2} \text{ लाअ} \right\} + \text{स्थि} \therefore \text{स्थि} = \frac{ka^2}{2a} \text{ लाअ}$$

इस लिये

$$f = \frac{k}{a} \left\{ \frac{y\sqrt{y^2 - a^2}}{2} - \frac{a^2}{2} \text{ ला } \left[\frac{y + \sqrt{y^2 - a^2}}{a} \right] \right\}$$

$$= \frac{yr}{2} - \frac{अक}{2} \text{ ला } \left[\frac{y}{a} + \frac{r}{k} \right]$$

केन्द्र से वक्र के प बिन्दु तक एक रेखा कर दो तो भुज, कोटि, श्रुति से जो जात्यत्रिभुज होगा उस का फल $\frac{yr}{2}$ यह होगा। इस लिये श्रुति, अतिपरवलय का चाप और केन्द्र और शिरःस्थान का अन्तर a से जो वक्र त्रिबाहु होगा उस का फल $= \frac{अक}{2} \text{ ला} \left(\frac{y}{a} + \frac{r}{k} \right) \dots \dots \dots (१)$

(चलनकलन का १११ वाँ प्रक्रम देखो)

१०८। चक्रालद के फल का आनयन ।

चक्रालद में $y = a(१ - \text{कोज्याप})$ । $r = a(\text{ष} + \text{ज्याप})$ ।

इस लिये ताय $= अज्याष \cdot \text{ताष}$ ।

और रताय $= अ^2(\text{ज्या}^2\text{ष} + \text{पज्याप})$ ताय

$$= अ^2\text{षज्याषताष} + \frac{अ^2}{2}(१ - \text{कोज्या}^2\text{प})\text{ताष}$$

$$\text{इसलिये } \int \text{रताय} = अ^2 \int \text{षज्याषताष} + \frac{अ^2}{2} \int (१ - \text{कोज्या}^2\text{प})\text{ताष}$$

$$= अ^2(-\text{षकोज्याप} + \text{ज्याप}) + \frac{अ^2}{2} \left(\text{ष} - \frac{\text{ज्या}^2\text{प}}{2} \right)$$

यदि ० और π के बीच ष के मान में फल साधन करें तो चक्रालद

के आधे का फल = $a^2 \pi + \frac{a^2 \pi}{2} = \frac{3a^2 \pi}{2}$ = चलितवृत्त के फल का डेढ़गुना इस लिये चलितवृत्त के फल को तीन गुना करने से सम्पूर्ण चक्रालद का फल होता है (चलनकलन में २८६ प्रक्रम का (११) वां वक्र देखो और वहाँ क = अ, और अ = ष मान लो)

इसी वक्र में यदि $r = अष$ तो पूर्वयुक्ति से $\int रताय = अ^2 \int षज्यापताप = अ^2 (-षकोज्याष + ज्याष)$ यह चक्रालद के साथी का फलसमीकरण हुआ । इस में ष के ० और π के बीच यदि फल साधन करें तो आधे वक्र का फल = $a^2 \pi$ । इस लिये चलितवृत्त का दूना इस का फल होगा ।

१०९। कातन्वली के फल का आनयन ।

$$\text{यहाँ } r = \frac{g}{2} \left(e^{\frac{y}{g}} + e^{-\frac{y}{g}} \right)$$

$$\text{इस लिये फ} = \int रताय = \frac{g}{2} \int \left(e^{\frac{y}{g}} + e^{-\frac{y}{g}} \right) ताय = \frac{g^2}{2} \left(e^{\frac{y}{g}} - e^{-\frac{y}{g}} \right)$$

$$= g \left\{ \frac{g}{2} \left(e^{\frac{y}{g}} - 2 + e^{-\frac{2y}{g}} \right) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= g \left\{ \frac{g}{2} \left(e^{\frac{2y}{g}} + 2 + e^{-\frac{2y}{g}} \right) - g^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = g (r^2 - g^2)^{\frac{1}{2}}$$

११०। $\left(\frac{y}{अ} \right)^{\frac{२}{२म+१}} + \left(\frac{र}{क} \right)^{\frac{२}{२न+१}} = १$ इस समीकरण के वक्र का फलानयन ।

यहाँ यदि $य = अज्या^{२म+१} ष$ और $र = क कोज्या^{२न+१} ष$

तो $ताय = अ (२म + १) कोज्याष, ज्या^{२म} ष, ताष$

$$\text{इस लिये फ} = \int रताय = अक(२म + १) \int कोज्या^{२न+१} ष ज्या^{२म} ष ताष$$

३५ प्रक्रम के (१) समीकरण से इस का चल ला सकते हों ।

वा खण्डचलानयन से

$$\begin{aligned} & \int कोज्या^{२न+१} ष ज्या^{२म} ष ताष \\ &= \frac{कोज्या^{२न+१} ष ज्या^{२म+१} ष}{२म + १} + \frac{२न + १}{२म + १} \int ज्या^{२म+२} ष कोज्या^{२न} ष ताष \\ &= \frac{कोज्या^{२न+१} ष ज्या^{२म+१} ष}{२म + १} \end{aligned}$$

$$+ \frac{2n+1}{2m+1} \int \text{ज्या}^{2n} \text{प} (1 - \text{कोज्या}^2 \text{प}) \text{कोज्या}^{2m} \text{प} \text{ताप} \\ = \frac{\text{कोज्या}^{2n+2} \text{प} \text{ज्या}^{2m} \text{प}}{2m+1}$$

$$+ \frac{2n+3}{2m+3} \int \text{ज्या}^{2m} \text{प} \text{कोज्या}^{2n} \text{प} \text{ताप} \\ - \frac{2n+1}{2m+1} \int \text{ज्या}^{2m} \text{प} \text{कोज्या}^{2n+2} \text{प} \text{ताप}$$

पश्चान्तगनयन कर $\frac{2m+2n+3}{2m+1}$ का भाग दे देने से

$$\int \text{ज्या}^{2m} \text{प} \text{कोज्या}^{2n+2} \text{प} \text{ताप} \\ = \frac{\text{कोज्या}^{2n+2} \text{प} \text{ज्या}^{2m} \text{प}}{2(m+n+1)} + \frac{2n+1}{(2m+n+1)} \int \text{ज्या}^{2m} \text{प} \text{कोज्या}^{2n} \text{प} \text{ताप} \\ \dots \dots (१)$$

यदि ० और $\frac{\pi}{2}$ के बीच प_r के मान में सान्तचल का मान लायें तो सम्पूर्ण वक्र का फल (१) से स्पष्ट है कि

$$\frac{१.३.५.७ \dots (2n+1) \cdot १.३.५.७ \dots (2m+1)}{२.४.६.८ \dots २(m+n+1)} २अक^{\pi}, \text{ यही होगा।}$$

न, म के स्थान में भिन्न भिन्न संख्याओं का उत्थापन देकर अनेक वक्र और उनके क्षेत्रफल जान सकते हो ।

जैसे यदि वक्र का $\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{x}{k}\right)^{\frac{2}{3}} = १$ ऐसा समीकरण हो तो यहाँ $m=१$ और $n=१$ इस लिये $2n+1=३$, और $2m+1=३$, $2(m+n+1)=६$ । फल में इन का उत्थापन देने से वक्र का संपूर्ण फल = $\frac{१.३.१.३}{२.४.६}$

$$\text{अक}^{\pi} = \frac{३}{४} २अक \pi = \frac{३}{४} \text{अक} \pi$$

इस वक्र को चलनकलन से सिद्ध कर सकते हो कि दीर्घवृत्त का अवलूत है ।

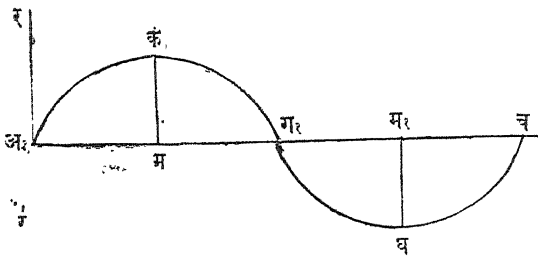
१११। कभी कभी दो सीमाओं के भीतर फलानयन में बड़ा धोखा पड़ जाता है । क्योंकि ऊपर के प्रक्रमों से जो फलानयन किया है किसी स्थान में r के धनत्व वा ऋणत्व का विचार नहीं किया है सर्वत्र r को एक ही प्रकार का मान लिया है । परन्तु फलानयन में r के स्थान में y के फल में जो उस का रूप होता है उस का उत्थापन देकर फल साधन किया है इस लिये संभव है कि इस फल

में ऋणात्मक र संबन्धी य का उत्थापन देने से वही मान आवे जो कि धनात्मक र में आता हो ऐसी दशा में अवश्य धोखा खाने की सम्भावना है ।

जैसे यदि किसी वक्र का $r = g$ ज्या $\frac{y}{a}$ ऐसा समीकरण हो तो यहाँ फल का समीकरण $\int r \text{ ताय} = g \int \text{ज्या } \frac{y}{a} \text{ ताय} = -g \text{अकोज्या } \frac{y}{a}$ मानो कि जब $y = y_1$ तो $r = r_1$ और जब $y = y_2$ तब $r = r_2$ इस लिये r_1 और r_2 कोटि मान के बीच में क्षेत्रफल $g \int_{y_1}^{y_2} \text{ज्या } \frac{y}{a} \text{ ताय}$

$$= g \text{अ} \left[\text{कोज्या } \frac{y_1}{a} - \text{कोज्या } \frac{y_2}{a} \right] \text{ यह हुआ । इस में पहले मानो}$$

कि $y_1 = 0$, $y_2 = a\pi$, तो फल $= 2g\text{अ}$ यह होगा । फिर मानो कि $y_1 = 0$, $y_2 = 2a\pi$ तो $g\text{अ} \left[\text{कोज्या } \frac{y_1}{a} - \text{कोज्या } \frac{y_2}{a} \right]$ इस का मान शून्य होगा जो कि क्षेत्र की आकृति से असम्भव है क्योंकि जब तक y , 0 से $\frac{a\pi}{2}$ के ऊपर आवेगा तब तक r का धनमान बढ़ता रहेगा फिर आगे धनमान घटने लगेगा जब $y = a\pi$ तब शून्य हो जायगा इस लिये वक्र फिर y अक्ष में मिलेगा इस लिये $y_1 = 0$ और $y_2 = a\pi$ के बीच का पहले जो फल $2g\text{अ}$ आया है वह एक ही चाल के r में सिद्ध हुआ ठीक आया । अब y का मान $a\pi$ के आगे बढ़ेगा तब r का मान ऋण होगा और वरावर y के $2a\pi$ मान तक ऋण ही ऋण चला जायगा ऐसी दशा में y अक्ष से नीचे वक्र वनेगा जैसा कि नीचे की आकृति से स्पष्ट है । यहाँ $\text{अ}_1 r_1 = a\pi$ और $\text{अ}_2 \text{च} = 2a\pi$



और $\text{कम} = g = m_2 \text{घ}$ ।
और वक्र के धन कोटि मान में $\text{अ}_1 \text{कग}$ खण्ड और ऋण कोटि मान में $\text{ग}_1 \text{घच}$ खण्ड है । इस

लिये 0 और $2a\pi$ के बीच y के मान में $\text{अ}_1 \text{कग}$ घच का फल वक्र के समीकरण से $\text{अ}_1 \text{कग}$ का अर्थात् $2g\text{अ}$ का दूना $4g\text{अ}$ होगा परन्तु फल के समीकरण से शून्य आया इस लिये वह असम्भव है । ऐसी स्थिति

में चाहिये कि ग, घ च के फल के लिये र का मान ऋण मानो तब इस

$$\text{का फल} = \int (-r) \text{ताय} = g \int (-\text{ज्या } \frac{y}{a}) \text{ताय} = \text{अग कोज्या } \frac{y}{a} + \text{स्थि}$$

$$\begin{aligned} \text{इस लिये सम्पूर्ण फल} &= g \int_0^{a\pi} \text{ज्या } \frac{y}{a} \text{ताय} + g \int_{a\pi}^{2a\pi} (-\text{ज्या } \frac{y}{a}) \text{ताय} \\ &= 2g\text{अ} + 2g\text{अ} = 4g\text{अ यह ठीक होगा ।} \end{aligned}$$

ऐसे ऐसे स्थानों में र के धनत्व वा ऋणत्व का बिना विचार किये फलानयन ठीक न होगा ।

११२। जब कहीं सीमितवक्र के फल साधन में $\int r \text{ताय}$ के मान में y के स्थान में क्या क्या उत्थापन दें जिस में सम्पूर्ण वक्र का फल आ जाय इस में संशय जान पड़े तो $\int r \text{ताय}$ स्थान में $\int r \frac{\text{ताय}}{\text{ताचा}}$ ताचा इस का उत्थापन देने से सुगमता हो जायगी इस में चा के स्थान में वक्र के परिधि का वा तत्सम्बन्धी और कोई चल का उत्थापन देने से सम्पूर्ण फल तुरन्त आ जायगा ।

जैसे दीर्घवृत्त में ७७ वें प्रक्रम से

$$\frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} = \text{अ} \sqrt{(1 - \text{इ}^2 \text{ज्या}^2 \text{प}} \quad \text{और} \quad \frac{\text{ताय}}{\text{ताचा}} = \text{अकोज्याप इस लिये}$$

$$\frac{\text{ताय}}{\text{ताचा}} = \frac{\text{कोज्याप}}{\sqrt{1 - \text{इ}^2 \text{ज्या}^2 \text{प}}} \quad \text{और} \quad r \cdot \frac{\text{ताय}}{\text{ताचा}} \cdot \text{ताचा} = \text{अकोज्याप ताय}$$

$$\text{इस लिये} \int r \frac{\text{ताय}}{\text{ताचा}} \text{ताचा} = \text{अक} \int \text{कोज्या}^2 \text{प ताय}$$

$$= \frac{\text{अक}}{2} (1 + \text{कोज्या} 2\text{प}) \text{ताय} = \frac{\text{अक}}{2} (\text{घ} - \frac{\text{ज्या} 2\text{प}}{2}) \text{अब सम्पूर्ण दीर्घवृत्त की}$$

परिधि में प, चार समकोण अर्थात् 2π होगा इस लिये इस का उत्थापन देने से सम्पूर्ण दीर्घवृत्त का फल $= \text{अक}^2 = \frac{\text{क}}{\text{अ}} \text{अ}^2\pi$ । यही पहले भी सिद्ध हुआ था ।

कहीं कहीं y को कोटि और r को भुज मान कर भी दो भुजों के बीच वक्रिय फल का साधन कर सकते हो ।

$$\text{जैसे परवलय में } r^2 = 4\text{अय} \therefore \frac{r^2}{4\text{अ}} = \text{य इस लिये}$$

$$\int \text{यतार} = \frac{1}{4\alpha} \int r^2 \text{तार} = \frac{r^2}{4\alpha} = \frac{r^2 \times r}{4\alpha \times 3} = \frac{y \times r}{3}$$

यह फल वक्र के विन्दु से r अक्ष पर जो y के तुल्य लम्ब पड़ा उस से और लम्बमूल और वक्र के शिरःस्थान α तक जो रेखा और वक्र के चाप से जो वक्रत्रिवाहु हुआ उस का है ।

११३। २, और ४० वें प्रक्रम से स्पष्ट है कि दो कोटियों (r_0, r_n)

$$\text{के बीच वक्र का फल} = \int_{y_0}^{y_n} r \text{ताय} = r_0 \text{च}_1 + r_1 \text{च}_2 + \dots + r_{n-1} \text{च}_n$$

यही है । जहाँ $r = f(y)$, $r_0 = f(y_0)$, $r_1 = f(y_1) \dots$

$r_n = f(y_n)$ इस लिये ६३ प्रक्रम की युक्ति से श्रेढीरूप फल के पदों का मान $r \Delta y$ इस साँचे से अथवा $f(y) \Delta y$ इस साँचे से प्रकाश कर सकते हैं ।

यहाँ भी ठीक वैसा ही अर्थ समझना चाहिये और च का सूचक जैसा कि चलनकलन में प्रसिद्ध है Δy है ।

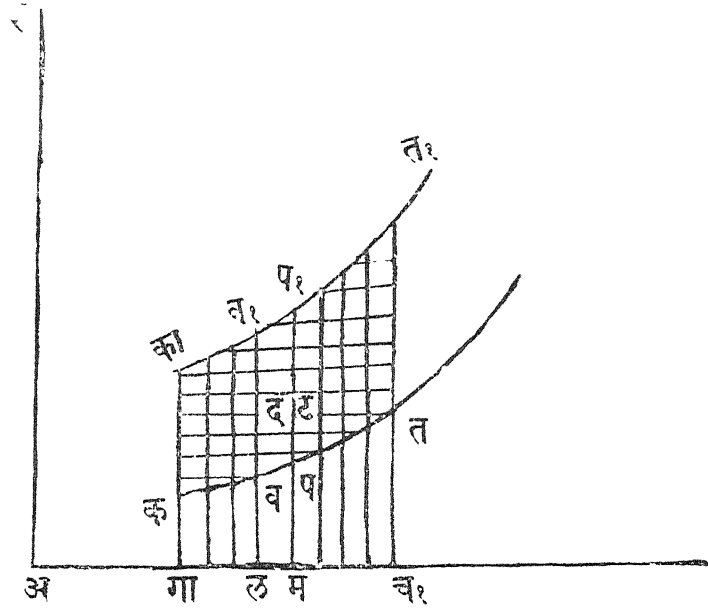
इस लिये दो कोटियोंके बीच वक्र का फल यौर Δy इस से प्रकाश कर सकते हैं $r \Delta y$ के पहले जो यौ है उस से यह समझना चाहिये कि Δy के स्थान में $\text{च}_1, \text{च}_2, \dots, \text{च}_n$ का और r के स्थान में $r_0, r_1, r_2, \dots, r_{n-1}$ का उत्थापन देने से जितने पद होंगे उन सबों का योग किया हुआ है ।

५ वें प्रक्रम से स्पष्ट जान पड़ेगा कि यदि $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ इत्यादि को (जो अत्यल्प मान है) Δy से प्रकाश करें और $k_1 \alpha_1, k_2 \alpha_2$ इत्यादि को r से, तो पास की दो कोटि, तदन्तर्गत भुजान्तर = Δy और वक्र चापान्तर से जो चतुर्भुज बनेगा उस का फल = $r \Delta y$ यह होगा ।

और r , के स्थान में r_0, r_1 इत्यादि का Δy के स्थान में α_1, α_2 इत्यादि का उत्थापन देने से श्रेढी के प्रत्येक पद क्रम से प्रत्येक वक्रचतुर्भुज के फल होंगे ।

वक्र क्षेत्र के फल ही से धीरे धीरे चलराशिकलन का प्रचार हुआ । क्षेत्र का छोटा छोटा खण्ड कर के पृथक् पृथक् खण्डों के फलों के योग से फल का ले आना भास्कर के गोलाध्याय के पृष्ठ फल देखने से जान पड़ता है कि भास्कर को समझ पड़ा था परन्तु इन से पहले भारतवर्ष में इस प्रकार से फल ले आने की कहीं भी चर्चा नहीं है ।

११४। दो वक्रों के चाप और उन के कोट्यन्तर से जो क्षेत्र बनेगा उस का फलानयन ।



कल्पना करो कि काव,प,त, एक वक्र का चाप और कवपत दूसरे वक्र का चाप, काक प्रथम कोट्यन्तर और त,त दूसरा कोट्यन्तर इन से काकतत, वक्र क्षेत्र जो बना है उस का फल जानना है ।

र अक्ष के समानान्तर और य अक्ष के समानान्तर अनेक रेखा जिन में दो दो का अन्तर बहुत ही अल्प हो खींचने से देखो अनेक, क्षेत्र के भीतर आयत बन गये हैं जिन में किसी एक दट का फल (यदि अल = य, दल = र और अम = य + Δय, मट = र + Δर) ΔयΔर यही होगा । अब, कव,प,प वक्रचतुर्भुज के बीच जितने छोटे छोटे दट के ऐसे चतुर्भुज हैं उन के फलों का योग यौΔयΔर यही होगा । यहाँ क्षेत्र के देखने से स्पष्ट है कि Δय सर्वत्र एक ही है इस लिये

$$यौ\Deltaय\Deltaर = \int_{लव}^{लव} \Deltaयतार = \Deltaय \int_{लव}^{लव} तार$$

इस में Δर का मान अत्यल्प मानने से अर्थात् तार मानने से कव, प,प वक्र चतुर्भुज के विलक्षण खण्ड हैं उन का लोप हो जायगा ।

$$इस लिये कव,प,प = \Deltaय \int_{फ(य)}^{फ(य)} तार = \Deltaय \{ फ(य) - फ(य) \}$$

यहाँ फा(य) = वल = ऊपर के वक्र की कोटि और

फ(य) = वल = नीचे के वक्र की कोटि ।

इस प्रकार सब स्तम्भरूप वक्रचतुर्भुजों का योग Δ य { फा(य) - फ(य) }
इस सांचे से निकाल सकते हो अर्थात् यदि अगा = गा, अच_१ = चा तो

$$\text{कका त_१त} = \text{यौ} \Delta \text{य} \{ \text{फा}(\text{य}) - \text{फ}(\text{य}) \} = \int_{\text{गा}}^{\text{चा}} \{ \text{फा}(\text{य}) - \text{फ}(\text{य}) \} \text{ताय}$$

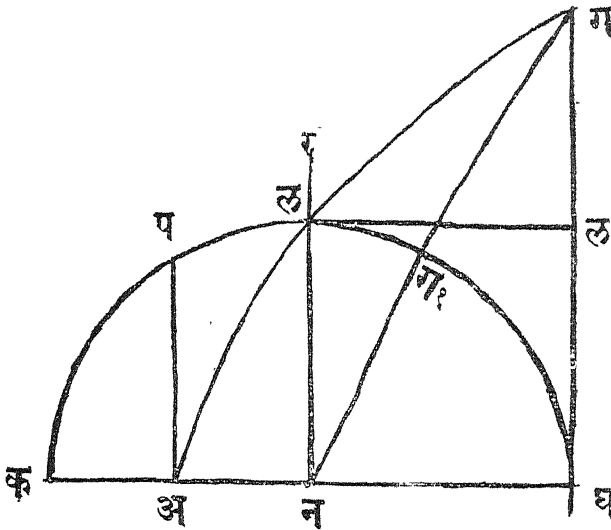
यदि द्विगुणचलानयन की रीति से इस फल को लिखें तो इस का

मान $\int_{\text{गा}}^{\text{चा}} \int_{\text{फ}(\text{य})}^{\text{फा}(\text{य})} \text{तार ताय}$ ऐसा होगा ।

११५। यदि जिन दो वक्रों के य = फा(र) । य = फ(र) ऐसे समीकरण हों और उन से सीमितक्षेत्र का फल जानना हो तो स्पष्ट है कि ऊपर के मान में य र को बदल देना होगा । अर्थात् तब क्षेत्र का फल

$$\int_{\text{गा}}^{\text{चा}} \int_{\text{फ}(\text{र})}^{\text{फा}(\text{र})} \text{ताय तार}$$
 ऐसा होगा ।

११६। ऊपर के दोनों प्रक्रमों की व्याप्ति दिखलाने के लिये एक उदाहरण दिखलाते हैं ।



कल्पना करो कि कलघ वृत्त, और अलग परवलय में न मूलविन्दु, नल =
२अ = वृत्त का व्यासार्द्ध, नअ = कअ = अ, तो यदि न विन्दु से घ की ओर भुज-

गणना करें तो वृत्त का समीकरण $r^2 = 4a^2 - y^2$ और परवलय का समीकरण $r^2 = 4a(a + y)$ होगा। क्योंकि इस स्थिति में न परवलय की नाभी होगी।

अब यहाँ यह इच्छा है कि घल वृत्त का चाप, गल परवलय का चाप, गघ परवलय की कोटि इन से जो गघल वक्र त्रिवाहु होगा उस का फल निकालें।

११४ वें प्रक्रम में जो ऐसे क्षेत्रों के लिये फल का $\int_{\text{गा}}^{\text{चा}} \int_{\text{फ(य)}}^{\text{फा(य)}} \text{तार ताय यह}$

समीकरण है इस में फा(य) = $\sqrt{4a(a + y)}$, फ(य) = $\sqrt{4a^2 - y^2}$, चा = नघ = $2a$, और गा = 0 मानने से घलग का फल

$$= \int_0^{2a} \{ \text{फा(य)} - \text{फ(य)} \} \text{ताय}$$

$$= \int_0^{2a} \{ (4a^2 + 4ay)^{\frac{1}{2}} - (4a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} \} \text{ताय}$$

$$= \int_0^{2a} (4a^2 + 4ay)^{\frac{1}{2}} \text{ताय} - \int_0^{2a} (4a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} \text{ताय}$$

$$\text{परन्तु} = \int (4a^2 + 4ay)^{\frac{1}{2}} \text{ताय} = \frac{2}{3} \sqrt{a} (a + y)^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{और} \int_0^{2a} (4a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} \text{ताय} = \frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}} (3a)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}} a^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2}{3} \{ (3)^{\frac{3}{2}} a^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}} \} = \frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}} (\sqrt{27} - 1)$$

$$\text{और} \int (4a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} \text{ताय} = 2a^2 \text{ज्या}^{-1} \frac{y}{2a} + y \sqrt{(4a^2 - y^2)}$$

$$\text{इस लिये} \int_0^{2a} (4a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} \text{ताय} = a^2 \pi$$

ऊपर फल मान में इन का उत्थापन देने से

$$\text{फ} = \int_0^{2a} \{ (4a^2 + 4ay)^{\frac{1}{2}} \text{ताय} - (4a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} \} \text{ताय}$$

$$= \frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}} (\sqrt{27} - 1) - a^2 \pi$$

यदि परवलय में भुज की गणना अ बिन्दु से करें तो १०५ प्रक्रम से

$$\text{अलन परवलयखण्ड का फल} = \frac{a \times 2a \times 2}{3} = \frac{4a^2}{3} \text{ और अगघ परवलयखण्ड}$$

$$\text{का फल} = \frac{2अघ \times गघ}{३} = \frac{२ \times ३अ(१२अ^२)}{३} = ४अ^२\sqrt{३} । \text{ इन दोनों का}$$

$$\text{अन्तर नघगल वक्रचतुर्भुज का फल} = ४अ^२\sqrt{३} - \frac{४अ^२}{३} = \frac{४अ^२}{३}(\sqrt{२७}-१)$$

इस में वृत्त के चतुर्थांश घनल को अर्थात् $अ^२\pi$ इस को घटा देने से गलघ वक्र क्षेत्र का फल = $\frac{४अ^२}{३}(\sqrt{२७}-१)-अ^२\pi$ । यही पहले भी सिद्ध हुआ था ।

इसी जगह यदि अल परवलय का चाप, कल, वृत्त का चाप, और कअ भुजान्तर से जो क्षेत्र है इस का फल अपेक्षित हो तो क्षेत्र से स्पष्ट है कि न से यदि क की ओर भुजगणना करें और भुज ही को कोटि मान लें तो यहाँ वृत्त का समीकरण $र^२ = ४अ^२ - य^२$ यह जो है उस से $य^२ = ४अ^२ - र^२$ और परवलय का समीकरण $र^२ = ४अ(अ-य)$ जो यह होगा उस से $य = अ - \frac{र^२}{४अ}$

$$\text{अब ११५वें प्रक्रम से फा(र) = } \sqrt{४अ^२ - र^२} । \text{ फ(र) = } अ - \frac{र^२}{४अ}$$

$$\begin{aligned} \text{चा} = २अ, \text{ गा} = ० \text{ और क्षेत्र का फल} &= \int_{\text{गा}}^{\text{चा}} \int_{\text{फ(र)}}^{\text{फा(र)}} \text{ ताय तार} \\ &= \int_0^{२अ} \left\{ \text{फा(र)} - \text{फ(र)} \right\} \text{ तार} = \int_0^{२अ} \left\{ \sqrt{४अ^२ - र^२} - अ + \frac{र^२}{४अ} \right\} \text{ तार} \end{aligned}$$

$$\text{परन्तु } \int \sqrt{४अ^२ - र^२} \text{ तार} = २अ^२ \text{ज्या}^{-१} \frac{र}{२अ} + र\sqrt{४अ^२ - र^२}$$

$$\text{और } \int \left(अ + \frac{र^२}{४अ} \right) \text{ तार} = अर - \frac{र^३}{१२अ}$$

इस लिये

$$\int_0^{२अ} \left\{ \sqrt{४अ^२ - र^२} - \left(अ - \frac{र^२}{४अ} \right) \right\} \text{ तार} = अ^२\pi - २अ^२ + \frac{४}{३} अ^३$$

$$= अ^२\pi - \frac{४}{३} अ^३ \text{ यही फल हुआ ।}$$

इसे परवलयखण्ड नअल और वृत्तचतुर्थांश नकल के अन्तर पर से भी निकाल सकते हो । इस तरह से जहाँ पर जिन सीमाओं के भीतर फल अपेक्षित

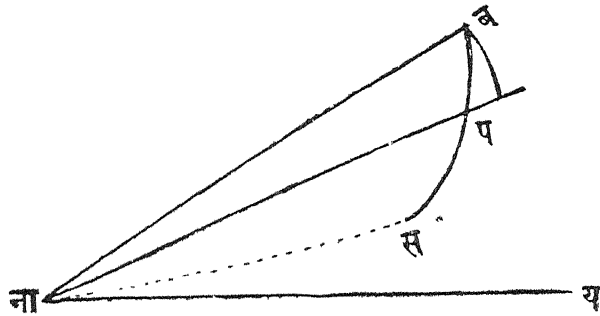
हो वहाँ पर क्षेत्र की आकृति से उन सीमाओं को अच्छी तरह से जाँच कर तब उन के उत्थापन से फल का साधन करो ।

जहाँ दोनों वक्रात्मक भुज एक ही वक्र के शाखा हों वहाँ पर ११४ और ११५ प्रक्रम की युक्ति बहुत ही काम की है जैसे किसी वक्र का यदि $(r - m y - g)^2 = a^2 - y^2$ यह समीकरण हो तो इस पर से r का एक मान $r = m y + g + \sqrt{a^2 - y^2}$ यह दूसरा $m y + g - \sqrt{a^2 - y^2}$ यह होगा ।

यहाँ $f_1(y) = m y + g + \sqrt{a^2 - y^2}$ और $f_2(y) = m y + g - \sqrt{a^2 - y^2}$ मान लें तो $f_1(y) - f_2(y) = 2\sqrt{a^2 - y^2}$ इस लिये वक्रशाखा और कोट्यन्तर से उत्पन्न फल $2 \int_a^b \sqrt{a^2 - y^2} dy$ तब यह होगा । यहाँ y का परमालप

मान $-a$ और परमाधिक a मान लें तो पहले वक्र का सम्पूर्ण फल = $2 \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - y^2} dy = \pi a^2$ यही होगा ।

११७। अक्षीय भुजयुग्म पर से वक्र का फलानयन ।



सबव वक्र में मान लो कि ना ध्रुवस्थान नाय नियत रेखा नाप = श्रु । \angle यनाप = प और श्रु = फ(प) । तो यदि नासप वक्रत्रिवाहु का फल = आ हो तो चलनकलन के १५८ वें प्रक्रम से

$$\frac{\text{नाआ}}{\text{ताप}} = \frac{\text{श्रु}^2}{2} = \frac{\{ \text{फ(प)} \}^2}{2}$$

इस लिये आ = $\frac{1}{2} \int \{ \text{फ(प)} \}^2 \text{ताप} + \text{स्थि}$ । यहाँ वक्र में स बिन्दु को कोई निश्चित बिन्दु समझो ।

$$\text{मानो कि } \int \frac{\{ \text{फ(प)} \}^2 \text{ताप}}{2} = \text{फा(प)}$$

$$\text{तो आ} = \text{फा}(\psi) + \text{स्थि} \dots \dots \dots (१)$$

कल्पना करो कि जब $\psi = \psi_1$ तब $\text{आ} = \text{आ}_1$ और जब $\psi = \psi_2$ तब $\text{आ} = \text{आ}_2$
इस लिये (१) समीकरण से

$$\text{आ}_2 - \text{आ}_1 = \text{फा}(\psi_2) - \text{फा}(\psi_1) = \frac{1}{2} \int_{\psi_1}^{\psi_2} \{ \text{फ}(\psi) \}^2 \text{ताप}$$

यदि श्रुति और स्पर्शरेखा से उत्पन्न कोण का मान θ रक्खो और ध्रुवस्थान से स्पर्शरेखा पर पड़े हुए लम्ब का मान l मानो तो त्रिकोणमिति से

$$\text{ज्याभ} = \frac{l}{\text{श्रु}} = \text{श्रु} \frac{\text{ताप}}{\text{ताचा}} \quad (\text{चलनकलन के १५५ वें प्रक्रम से})$$

$$\text{इस लिये आ} = \frac{1}{2} \int \text{श्रु}^2 \text{ताप} = \frac{1}{2} \int \text{श्रु}^2 \frac{\text{ताप}}{\text{ताचा}} \cdot \text{ताचा}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{\text{श्रु} \cdot \text{ल}}{\text{श्रु}} \text{ताचा} = \frac{1}{2} \int \text{ल} \text{ताचा} \dots \dots \dots (२)$$

यहाँ l का मान l के फल रूप में वा $\frac{\text{ताचा}}{\text{ताल}}$ का मान l के फल रूप में जानने से आ का मान l वा l के फल रूप में जान सकते हो ।

$$\text{आ} = \frac{1}{2} \int \text{ल} \text{ताचा} = \frac{1}{2} \int \text{ल} \frac{\text{ताचा}}{\text{ताश्रु}} \text{ताश्रु} = \frac{1}{2} \int \frac{\text{लश्रु} \text{ताश्रु}}{\sqrt{(\text{श्रु}^2 - \text{ल}^2)}} \dots \dots (३)$$

७५ प्रक्रम के (६)वें समीकरण से ।

ऊपर दिखलाये हुए तीनों समीकरण पर से अनेक वक्र का फल जान सकते हैं ।

११८। सामासिक सर्पिल का फलानयन (जिस वक्र के समीकरण वा नाम इत्यादि में संशय पड़े तो चलनकलन का २८६ प्रक्रम देखना चाहिये) ।

$$\text{यहाँ श्रु} = \text{अ} \frac{p}{k} \text{इस लिये ११७ प्रक्रम के (१) समीकरण से}$$

$$\text{आ} = \frac{1}{2} \int \text{अ}^2 \frac{r^2 p}{k} = \frac{\text{अ}^2 k}{2} \int \frac{r^2 p}{k} + \text{स्थि} ।$$

$$\text{और आ}_2 - \text{आ}_1 = \frac{\text{अ}^2 k}{2} \left[\frac{r^2 p_2}{k} - \frac{r^2 p_1}{k} \right] = \frac{k}{2} (\text{श्रु}_2^2 - \text{श्रु}_1^2)$$

इस लिये श्रु_2 , श्रु_1 ये दो भुज और तदन्तर्गत वक्र का चाप इन से जो क्षेत्र होगा उस का फल $\frac{k}{2} (\text{श्रु}_2^2 - \text{श्रु}_1^2)$ यही होगा ।

११९। अक्षीय भुजयुग्म पर से परवलय का फलानयन ।

चलनकलन के १०८ प्रक्रम से ।

यहाँ $\theta = \frac{अ}{कोज्या^२\frac{१}{२}प}$ इस लिये

$$आ = \frac{अ^२}{२} \int \frac{ताप}{कोज्या^२\frac{१}{२}प} = अ^२ \int (१ + स्प^२\frac{१}{२}प) तास्प\frac{१}{२}प \\ = अ^२(स्प\frac{१}{२}प + \frac{स्प^३\frac{१}{२}प}{३}) + स्थि ।$$

$$इस लिये आ२-आ१ = अ^२(स्प\frac{१}{२}प२ + \frac{स्प^३\frac{१}{२}प}{३}) - अ^२(स्प\frac{१}{२}प१ - \frac{३}{३}स्प^३\frac{१}{२}प०)$$

इस में यदि $प१ = ०$ और $प२ = \frac{\pi}{३}$ तो

$आ२-आ१ = अ^२(१ + \frac{१}{३}) = \frac{४}{३}अ^२ = \frac{३}{३} \frac{अ \times २अ}{१}$ अर्थात् परवलय के नाभिग कोटि, तत्सम्बन्धि शिरःस्थान से भुज और परवलय का चाप इन से बने क्षेत्र का फल $\frac{३}{३} अ \times २अ$ यह वही सिद्ध हुआ जो १०५ वें प्रक्रम से सिद्ध होता है ।

१२०। जिस वक्र का अक्षीय समीकरण $\theta = अ(प + ज्याष)$ यह है उस का फलानयन ।

$$यहाँ आ = \frac{१}{३}अ^२ \int (प + ज्याप)^२ ताप = \frac{अ^२}{२} \int (प^२ + २प ज्याष + ज्या^२ष) ताष \\ परन्तु \int प ज्याप = -पकोज्याप + ज्याष ।$$

$$और \int ज्या^२प ताप = \frac{१}{३} \int (१ - कोज्या२ष) ताष = \frac{१}{३}(प - \frac{ज्या२ष}{२})$$

इस लिये

$$आ = \frac{अ^२}{२} \left\{ \frac{प^३}{३} - २षकोज्याप + २ज्याप + प - \frac{१}{३}ज्या२ष \right\} + स्थि$$

यहाँ यदि ० और $\frac{\pi}{३}$ के बीच $प$ के मान में फल लावें तो

$$फल = \frac{अ^२}{२} \left(\frac{\pi^३}{३ \times ४} + \frac{\pi}{४} + २ \right) ।$$

$$१२१। यदि वक्र का अक्षीय समीकरण $\theta = २अ \frac{कोज्याष - \sqrt{(कोज्या२ष)}}{ज्या^२ष}$$$

ऐसा हो तो

$$आ = २अ^२ \int \frac{कोज्या^२ष + कोज्या२ष - २कोज्याष\sqrt{(कोज्या२ष)}}{ज्या^२ष} ताष$$

$$= 2a^2 \int \frac{\text{कोज्या}^3\phi + \text{कोज्या}2\phi}{\text{ज्या}^3\phi} \text{ताप} - 2a^2 \int \frac{\text{कोज्या}\phi \sqrt{\text{कोज्या}2\phi}}{\text{ज्या}^3\phi} \text{ताप}$$

परन्तु $\int \frac{\text{कोज्या}^3\phi + \text{कोज्या}2\phi}{\text{ज्या}^3\phi} \text{ताप} = \int (2\text{कोस्प}^3\phi - 1) \text{कोछे}^3\phi \text{ताप}$

$$= \text{कोस्प}^3\phi - \frac{2}{3} \text{कोस्प}^3\phi ।$$

और $\int \frac{\text{कोज्या}\phi \sqrt{\text{कोज्या}2\phi}}{\text{ज्या}^3\phi} \text{ताप} = \int \frac{\sqrt{(1 - 2\text{ज्या}^2\phi)} \text{ताज्या}\phi}{\text{ज्या}^3\phi}$

इस में मानो कि ज्या $\phi = \frac{1}{d}$ तो

$$\int \frac{\sqrt{(1 - 2\text{ज्या}^2\phi)}}{\text{ज्या}^3\phi} \text{ताप} = - \int \sqrt{(d^2 - 2)} \text{दताद}$$

$$= -\frac{1}{3} (d^2 - 2)^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{\text{ज्या}^3\phi} - 2 \right)^{\frac{3}{2}}$$

$= -\frac{1}{3} (\text{कोछे}^3\phi - 2)^{\frac{3}{2}}$ इन का उत्थापन आ में देने से

$$\text{आ} = 2a^2 \text{कोस्प}^3\phi - \frac{4a^2}{3} \text{कोस्प}^3\phi + \frac{4a^2}{3} (\text{कोछे}^3\phi - 2)^{\frac{3}{2}} + \text{स्थि}$$

$$= 2a^2 \text{कोस्प}^3\phi + \frac{4a^2}{3} \left\{ (\text{कोछे}^3\phi - 2)^{\frac{3}{2}} - \text{कोस्प}^3\phi \right\} + \text{स्थि}$$

$$= 2a^2 \text{कोस्प}^3\phi + \frac{4a^2}{3} \left\{ \frac{(1 - 2\text{ज्या}^2\phi)^{\frac{3}{2}} - \text{ज्या}^3\phi \text{कोस्प}^3\phi}{\text{ज्या}^3\phi} \right\} + \text{स्थि}$$

$$= 2a^2 \text{कोस्प}^3\phi + \frac{4a^2}{3} \frac{(\text{कोज्या}2\phi)^{\frac{3}{2}} - \text{कोज्या}^3\phi}{\text{ज्या}^3\phi} + \text{स्थि}$$

१२२। जिस सर्पिल का अक्षीयसमीकरण $\text{श्रु} = \text{अ}\rho^n$ यह है उस का फलानयन ।

$$\text{यहाँ आ} = \frac{1}{2} \int \text{श्रु}^2 \text{ताप} = \frac{1}{2} \int \text{अ}^2 \rho^{2n} \text{ताप} = \frac{\text{अ}^2}{2} \int \rho^{2n} \text{ताप}$$

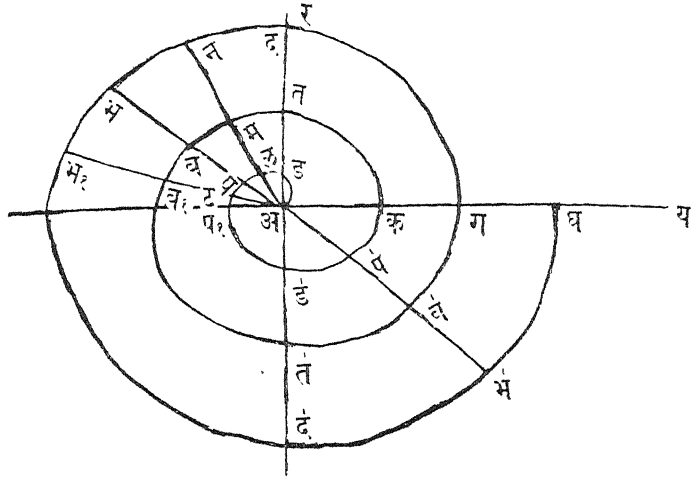
$$= \frac{\text{अ}^2}{2(2n+1)} \rho^{2n+1} + \text{स्थि} = \frac{\text{अ}^2 \rho^{2n} \times \rho}{2(2n+1)} + \text{स्थि} = \frac{\text{श्रु}^2 \times \rho}{2(2n+1)} + \text{स्थि}$$

$$= \frac{\text{श्रु}^2 \times \left(\frac{\text{श्रु}}{\text{अ}}\right)^{\frac{1}{n}}}{2(2n+1)} + \text{स्थि} = \frac{\text{श्रु}^{\frac{2n+1}{n}}}{2\text{अ}^{\frac{1}{n}}(2n+1)} + \text{स्थि}$$

यहाँ क्षेत्र के लक्षण से जब $\rho = 0$, $\text{श्रु} = 0$ और फल $= 0$ इस लिये स्थिराङ्क शून्य होगा । इस में यदि $n = 1$ तो सर्पिल आर्किमिडिज़ का हो जायगा इस की

आकृति चलन कलन के २८६ प्रक्रम में लिखी है यहाँ भी बोध के लिये नीचे लिखा है ।

इस में अ, ध्रुव, अय स्थिर रेखा जिस से प की गणना है । य से त की ओर घन गणना है । जब $p = 0$ तब $\theta = अ \cdot प = 0$ । जब $p = \frac{\pi}{2}$ तब $\theta = \frac{अ\pi}{2} = अड$ । जब $p = \pi$, तब $\theta = अग = अथ$ ।



इसी तरह जब $p = 2\pi$ तब $\theta = 2अ \cdot \pi = अक$ । इस लिये अ के चारो ओर श्रुति के एक वार घूमने में अडलपटथ डे पंक खण्ड उत्पन्न हुआ ।

इस खण्ड और अक श्रुति से जो क्षेत्र बना है उस का फल ऊपर फल के

समीकरण में अर्थात् $\frac{\frac{2\pi+1}{2}\theta}{1}$ इस में न के स्थान में १ और θ के $2अ\pi(2\pi+1)$

स्थान में $2अ \cdot \pi$ का उत्थापन देने से $\frac{\theta^2}{2अ} = \frac{2अ^2 \times \pi^2}{2अ} = \frac{2अ^2 \pi^2}{2अ} = \frac{\pi \times (2अ\pi)^2}{2अ}$

$= \frac{\pi \theta^2}{2अ}$ ऐसा होगा यदि $\theta = 2अ\pi$ । और जब श्रुति का दो फेरा होगा तब θ

$= 4अ \cdot \pi = 2\theta$ इस का फल में उत्थापन देने से $\frac{\pi (2\theta)^2}{2अ}$ यह मान जो

आवेगा इस में अ के चारो ओर श्रुति के दो वार घूम जाने के कारण अडलपटथ डे पंक दो वार आजायगा इस लिये श्रुति के दो वार फेरा करने से

सर्पिल का ठीक फल $= \frac{\pi (2\theta)^2}{2अ} - \frac{\pi \theta^2}{2अ} = \frac{3\pi \theta^2}{2अ}$ यह होगा और

$$\text{दोनों फेरों के चापों के अन्तर में } \frac{3\pi\theta^2}{3} - \frac{\pi\theta^2}{3} = \frac{2\pi\theta^2}{3}$$

= $2\pi\theta^2$ यह फल होगा ।

इसी तरह श्रुति के न वार फेरा करने में $\theta = n\theta$ और $n-1$ वार फेरा करने में $\theta = (n-1)\theta$ ।

$$\text{इस लिये } \theta \text{ के } n \text{ वार फेरा करने में फल} = \frac{\pi}{3} \frac{(n\theta)^2 - (n-1)^2\theta^2}{\theta}$$

$$= \frac{\pi\theta^2}{3} \left\{ n^2 - (n-1)^2 \right\}$$

$$\text{और } n+1 \text{ वार फेरा करने में फल} = \frac{\pi\theta^2}{3} \left\{ (n+1)^2 - n^2 \right\}$$

इस लिये n और $n+1$ वार फेरा करने में दोनों चापों के अन्तर में

$$\text{फल} = \frac{\pi\theta^2}{3} \left\{ (n+1)^2 + (n-1)^2 - 2n^2 \right\} = \frac{\pi\theta^2}{3} \times 2 = 2\pi\theta^2$$

= प्रथम और दूसरे फेरे के चापों के अन्तर सम्बन्धी फल का n गुना यह सिद्ध होता है ।

इस सर्पिल के विषय में आगे कुछ और विचार किया जायगा ।

१२३। इलामूलक के फल का आनयन ।

यहाँ $\theta^2 = 2$ क कोज्या २ष

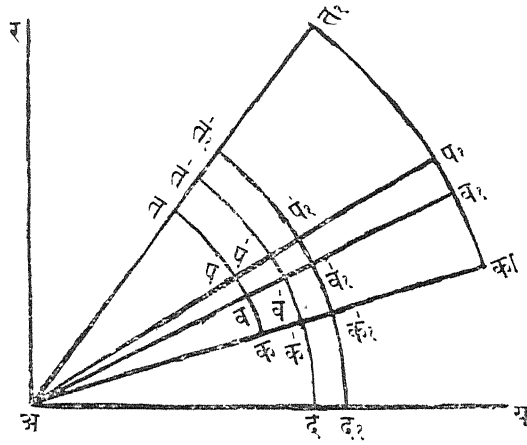
$$\text{इस लिये आ} = \frac{2}{2} \int \text{कोज्या } 2 \text{ ष ताष} = \frac{2}{2} \text{ज्या } 2 \text{ ष} + \text{स्थि} ।$$

यहाँ वक्र के लक्षण से जब $\theta = 0$ तब $\text{आ} = 0$ इस लिये $\text{स्थि} = 0$ ।

तब $\text{आ} = \frac{2}{2} \text{ज्या } 2 \text{ ष}$ इस में θ के स्थान में $\frac{\pi}{4}$ का उत्थापन देने से

चतुर्थांश फल = $\frac{2}{2}$ इस को ४ से गुणने से संपूर्ण इलामूलक का फल = 2 क

१२४। दो वक्र के चाप और श्रुत्यन्तर से बने क्षेत्र का फलानयन । कल्पना करो कि अ ध्रुवस्थान और अय, अर अक्ष से जो काव, प, त, कवपत वक्र के चाप और काक, तत, श्रुत्यन्तर से क्षेत्र है उस के फल का ज्ञान करना है ।



अव_r, अप_r अत्यन्त निकट दो श्रुति रेखा खींचो । अव = श्रु, अप = श्रु + Δ श्रु । अव_r = श्रु_r । अप_r = श्रु_r + Δ श्रु_r । और \angle व_r अप_r = Δ ष । और कवपत वक्र का समीकरण श्रु = फ(ष) और का व_rप_rत_r का समीकरण श्रु_r = फ_r(ष) समझो तो पव और प_rव_r को अत्यल्प होने के कारण सरल रेखा मान लेने से

अकव, अकप वक्र त्रिभुज का अन्तर = Δ अवप = $\frac{1}{2} \Delta$ ष श्रु (श्रु + Δ श्रु) और काअव_r काअप_r का अन्तर = Δ अव_rप_r = $\frac{1}{2} \Delta$ ष श्रु_r(श्रु_r + Δ श्रु_r)

इस लिये दोनों का अन्तर = काकप_r - काकव_r = व_rवप_r = Δ आ = $\frac{1}{2} \Delta$ ष { श्रु_r(श्रु_r + Δ श्रु_r) - श्रु(श्रु + Δ श्रु) }

$$\text{इस लिये } \frac{\Delta \text{आ}}{\Delta \text{ष}} = \frac{1}{2} \{ \text{श्रु}_r(\text{श्रु}_r + \Delta \text{श्रु}_r) - \text{श्रु}(\text{श्रु} + \Delta \text{श्रु}) \}$$

इसमें प मान शून्य मानने से श्रु_r = 0, श्रु = 0, इस लिये

$$\frac{\text{ताआ}}{\text{ताप}} = \frac{1}{2} (\text{श्रु}_r^2 - \text{श्रु}^2) = \frac{1}{2} [\{ \text{फ}_r(\text{ष}) \}^2 - \{ \text{फ}(\text{ष}) \}^2]$$

$$\text{इस लिये आ} = \frac{1}{2} \int [\{ \text{फ}_r(\text{ष}) \}^2 - \{ \text{फ}(\text{ष}) \}^2] \text{ताप}$$

यदि \angle यअक_r = अ_r, \angle यअत_r = क_r तो काकवपत_rप_rव_rका का फल आ =

$$\int_{\text{अ}_r}^{\text{क}_r} [\{ \text{फ}_r(\text{ष}) \}^2 - \{ \text{फ}(\text{ष}) \}^2] \text{ताप} \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{जब } \int \text{श्रु ताप} = \frac{\text{श्रु}^2}{2} \pm \text{स्थि इस लिये } \int \frac{\text{फ}_r(\text{ष})}{\text{फ}(\text{ष})} \text{श्रु ताप}$$

= ३[{ फा(प) }^२ - { फ(प) }^२] इस पर से (१) समीकरण को द्विगुण चलानयन की रीति से $\int_{\text{अ}}^{\text{क}} \int_{\text{अ}}^{\text{फ(प)}} \text{श्रु ताश्रु ताप}$ ऐसे लिख सकते हो।

१२५। इसी जगह यदि प = फ(श्रु), प_२ = फा(श्रु) ऐसे दो समीकरण के वक्र के चापों से और श्रु = अ, श्रु_२ = क ऐसे समीकरण के दो वृत्तों के चापों से बने क्षेत्र का फल जानना हो तो मान लो कि ककक_२का, ततत_२त_२, दो वक्र के चाप और कवपत, काव_२प_२त_२ दो वृत्त के चाप हैं जिन का अ केन्द्र है। अ केन्द्र से दकवपत, और दक_२व_२प_२त_२ वृत्त का चापखण्ड बनावो जिनके व्यासार्द्ध श्रु, श्रु_२ + श्रु हैं। तो चलनकलन के १५९ वें प्रक्रम से तत_२प_२व_२क_२कवपत का फल = आ

$$= \frac{\{ \text{श्रु}(\text{प}_२ - \text{प}) + (\text{श्रु} + \Delta \text{श्रु})(\text{प}_२ - \text{प}) \} \Delta \text{श्रु}}{२} \quad | \quad \Delta \text{श्रु का भाग दे देने से}$$

$$\frac{\text{आ}}{\text{श्रु}} = \frac{\text{श्रु}(\text{प}_२ - \text{प}) + (\text{श्रु} + \Delta \text{श्रु})(\text{प}_२ - \text{प})}{२}$$

इस लिये

$$\frac{\text{ताआ}}{\text{ताश्रु}} = \text{श्रु}(\text{प}_२ - \text{प}) = \text{श्रु} \{ \text{फा(श्रु)} - \text{फ(श्रु)} \}$$

इस लिये अभीष्ट क्षेत्र का फल

$$= \int_{\text{अ}}^{\text{क}} \text{श्रु} \{ \text{फा(श्रु)} - \text{फ(श्रु)} \} \text{ताश्रु} = \text{आ} \dots \dots \dots (१)$$

जब $\int \text{श्रुताप} = \text{श्रु} \int \text{ताप} = \text{श्रुप}$, श्रु को स्थिर मानसे से

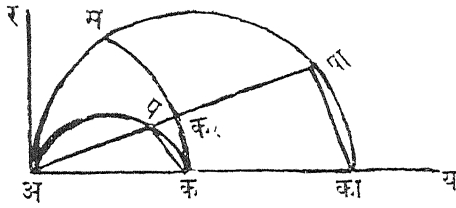
$$\text{इस लिये } \int_{\text{फ(श्रु)}}^{\text{फा(श्रु)}} \text{श्रुताप} = \text{श्रु} \{ \text{फा(श्रु)} - \text{फ(श्रु)} \}$$

इस लिये द्विगुणचलानयन की रीति से ऊपर के फल को

$$\int_{\text{अ}}^{\text{क}} \int_{\text{अ}}^{\text{फा(श्रु)}} \text{श्रुताप ताश्रु} \text{ ऐसे लिख सकते हो। यदि यहाँ दो वक्रों}$$

के चापान्तर्गत सीमित दोनों कर्णों के अनेक विभाग कर भ्रुव विन्दु से प्रत्येक विभाग पर गया ऐसा अनेक वृत्त बना डालो और वक्र चापों का भी अनेक विभाग कर प्रति विभागों में जो रेखा लगा दो तो रेखा और वृत्त के चापखण्डों से अनेक चतुर्भुज होंगे जिन में किसी एक का फल = श्रुप यह होगा।

१२६। जैसे अपक, अपाका वृत्तार्द्ध के चापों से और कका रेखा से बने



क्षेत्र का फल जानाना है तो मानो
अक = ग, अका = च
∠काअपा = ष, तो अप = श्रु = गकोज्याष, अपा = श्रु = चकोज्याष

इस लिये १२४ प्रक्रम से

$$\text{अभीष्ट फल} = \int_{अ}^{क} \int_{क}^{ता} \frac{फा(प)}{क(प)} \text{श्रुताश्रु ताप} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\text{गकोज्याष}}^{\text{चकोज्याष}} \text{श्रुताश्रु ताप}$$

$$\text{अब यहाँ } \int \frac{\text{चकोज्याष}}{\text{गकोज्याष}} \text{श्रुताश्रु} = \frac{1}{2} (\text{च}^2 - \text{ग}^2) \text{कोज्या}^2 \text{ष}$$

$$\text{इस लिये अभीष्ट फल} = \frac{1}{2} (\text{च}^2 - \text{ग}^2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{कोज्या}^2 \text{ष ताप}$$

$$\text{इस में } \int \text{कोज्या}^2 \text{ष ताप} = \int \frac{1 + \text{कोज्या} 2\text{ष}}{2} \text{ताप} = \frac{\text{प}}{2} + \frac{\text{ज्या} 2\text{ष}}{4}$$

$$\text{इस लिये } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{कोज्या}^2 \text{ष ताप} = \frac{\pi}{4} \text{ इस का उत्थापन फल में देने से फल} = \frac{\pi}{8} (\text{च}^2 - \text{ग}^2) ।$$

इसी क्षेत्र का यदि अक व्यासार्द्ध से बना कक स वृत्त चाप से दो चण्ड करें तो पहले अम, रुक, अपक, वृत्त चापों से बने क्षेत्र का फल १२५ वें प्रक्रम से, मान लो कि कपस एक वृत्त का चाप, और दूसरे वृत्त का अ बिन्दु रूप चाप, एक वक अपक वृत्तार्द्ध चाप, और दूसरा अस बड़े वृत्तार्द्ध का चाप इन से बना हुआ क्षेत्र है। यहाँ श्रु = गकोज्याष । और दूसरी श्रु = चकोज्याष

इस लिये ष = कोज्या^{-१} $\frac{\text{श्रु}}{\text{ग}}$, और ष_१ = कोज्या^{-१} $\frac{\text{श्रु}}{\text{च}}$, क = ग, अ = ०
इन का उत्थापन देने से

$$\int_{अ}^{क} \int_{क}^{\text{ता}} \frac{\text{कोज्या}^{-१} \frac{\text{श्रु}}{\text{च}}}{\text{कोज्या}^{-१} \frac{\text{श्रु}}{\text{ग}}} \text{श्रुताष ताप} = \int_0^{\text{ग}} \int \text{श्रुताष ताप}$$

$$\text{यहाँ } \int \frac{\text{कोज्या}^{-1} \frac{\text{श्रु}}{\text{च}}}{\text{कोज्या}^{-1} \frac{\text{श्रु}}{\text{ग}}} \text{श्रुताष} = \text{श्रु} \left[\text{कोज्या}^{-1} \frac{\text{श्रु}}{\text{च}} - \text{कोज्या}^{-1} \frac{\text{श्रु}}{\text{ग}} \right]$$

$$\text{और } \int \text{श्रुकोज्या}^{-1} \frac{\text{श्रु}}{\text{च}} \text{ ताश्रु} = \frac{1}{2} \{ (2\text{श्रु}^2 - \text{च}^2) \text{कोज्या}^{-1} \frac{\text{श्रु}}{\text{च}} - \text{श्रु} \sqrt{(\text{च}^2 - \text{श्रु}^2)} \} ।$$

$$\int \text{श्रुकोज्या}^{-1} \frac{\text{श्रु}}{\text{ग}} \text{ ताश्रु} = \frac{1}{2} \{ (2\text{श्रु}^2 - \text{ग}^2) \text{कोज्या}^{-1} \frac{\text{श्रु}}{\text{ग}} - \text{श्रु} \sqrt{(\text{ग}^2 - \text{श्रु}^2)} \}$$

$$\text{इस लिये } \int_0^{\pi} \text{कोज्या}^{-1} \frac{\text{श्रु}}{\text{च}} \text{ ताश्रु} \\ = \frac{1}{2} \{ (2\text{ग}^2 - \text{च}^2) \text{कोज्या}^{-1} \frac{\pi}{\text{च}} - \text{ग} \sqrt{(\text{च}^2 - \text{ग}^2)} + \text{च}^2 \frac{\pi}{2} \}$$

$$\text{और } \int_0^{\pi} \text{श्रुकोज्या}^{-1} \frac{\text{श्रु}}{\text{ग}} \text{ ताश्रु} = \frac{1}{2} \left\{ \text{ग}^2 \frac{\pi}{2} \right\}$$

इस लिये

$$\int_0^{\pi} \int \frac{\text{कोज्या}^{-1} \frac{\text{श्रु}}{\text{च}}}{\text{कोज्या}^{-1} \frac{\text{श्रु}}{\text{ग}}} \text{श्रुताषताश्रु} \\ = \frac{1}{2} \{ (2\text{ग}^2 - \text{च}^2) \text{कोज्या}^{-1} \frac{\pi}{\text{च}} - \text{ग} \sqrt{(\text{च}^2 - \text{ग}^2)} + \frac{\pi}{2} (\text{च}^2 - \text{ग}^2) \} \text{ यह एक खण्ड का फल हुआ ।}$$

अब कस वृत्तचाप, कास वृत्तचाप, और कका रेखा से उत्पन्न क्षेत्र के फल साधन में एक वक्र के चाप को कका रेखा समझो और दूसरे वक्र को असका मान लो तो ष = ० = फ(श्रु), ष_१ = कोज्या^{-१} $\frac{\text{श्रु}}{\text{च}}$ = फा(श्रु), क = च, अ = ग ।

इनका उत्थापन १२५ वें प्रक्रम के (१) समीकरण के दूसरे रूप में देने से

$$\int_{अ}^क \int_{फ(श्रु)}^{फा(श्रु)} \text{श्रुताषताश्रु} = \int_{ग}^{\text{च}} \int_0^{\text{कोज्या}^{-1} \frac{\text{श्रु}}{\text{च}}} \text{श्रुताषताश्रु}$$

यहाँ भी पहले खण्ड के फल साधन के ऐसा

$$\int_0^g \text{कोज्या}^{-1} \frac{\text{श्रु}}{च} \text{श्रुताष} = \text{अ कोज्या}^{-1} \frac{\text{श्रु}}{च}$$

$$\int \text{श्रुकोज्या}^{-1} \frac{\text{श्रु}}{च} \text{ताश्रु} = \frac{1}{2} \left\{ (2\text{श्रु}^2 - \text{च}^2) \text{कोज्या}^{-1} \frac{\text{श्रु}}{च} - \text{श्रु} \sqrt{(\text{च}^2 - \text{श्रु}^2)} \right\}$$

इस लिये

$$\int_g^{\pi} \int_0^{\text{कोज्या}^{-1} \frac{\text{श्रु}}{च}} \text{अ ताष ताश्रु}$$

$$= \int_g^{\text{च}} \text{श्रु कोज्या}^{-1} \frac{\text{श्रु}}{च} \text{ताश्रु}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \text{ग} \sqrt{(\text{च}^2 - \text{ग}^2)} - (2\text{ग}^2 - \text{च}^2) \text{कोज्या}^{-1} \frac{\text{ग}}{च} \right\}$$

यही दूसरे खण्ड का फल हुआ ।

अब इन दोनों खण्डों का योग करो तो $\frac{\pi}{2}(\text{च}^2 - \text{ग}^2)$ यह सम्पूर्ण क्षेत्र का फल ठीक पहले ही के तुल्य आया ।

१२७। यदि अक्षीय समीकरण पर से ११५ प्रक्रम के अलक क्षेत्र का फल साधन करें तो यहाँ न को ध्रुव स्थान मानने से परवलय का समीकरण $\text{श्रु} = \frac{\text{अ}}{\text{कोज्या}^2 \frac{\text{प}}{2}}$ जहाँ प का मान नक रेखा से लिया गया है । और वृत्त का अक्षीय समीकरण $\text{अ} = 2\text{अ}$ । इस लिये पहले श्रु के वश चलानयन

$$\text{करने से अलक का फल} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\text{अले}^{\frac{\text{प}}{2}}}^{2\text{अ}} \text{श्रु ताश्रु ताष}$$

इसी जगह यदि प के वश से पहले चलानयन करें तो प:

$$= \text{कोज्या}^{-1} \frac{2\text{अ}-\text{श्रु}}{\text{श्रु}} \text{मान लेने से अलक का फल} = \int_{\text{अ}}^{2\text{अ}} \int_0^{\text{प}} \int \text{श्रु ताष ताश्रु} ।$$

यदि घलग का फल अपेक्षित हो तो घग का अक्षीय समीकरण

$$\text{श्रु} = \frac{2\text{अ}}{\text{कोज्या}^2} \text{ और नग} = 2\text{अ}, \angle \text{कनग} = \frac{2\pi}{3}, \text{ और मान लो कि प:}$$

$$= \text{कोज्या}^{-1} \frac{2\text{अ}-\text{श्रु}}{\text{अ}} \text{ और प}_2 = \left[\frac{-2\text{अ}}{\text{श्रु}} \right] । \text{ अब यहाँ पहले प के वश}$$

चलानयन करने से घलग का फल = $\int_{2\alpha}^{2\beta} \int_{\phi}^{\psi} \text{श्रु ताश्रु ताप}$ । इसी का

फल नग रेखा से दो भाग कर पृथक् पृथक् लावें तो पहले उस

खण्ड का फल जिस में लग चाप है $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \int_{2\alpha}^{2\beta} \text{अछेप श्रुताश्रुताप}$

यह होगा फिर दूसरे खण्ड का फल = $\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \int_{2\alpha}^{2\beta} \text{अछेप श्रुताश्रुताप}$ यह होगा

और इन दोनों का योग ठीक पहले के बराबर क्षेत्र फल निकल आवेगा । इस तरह से जहाँ पर जैसा सुभीता जान पड़े तहाँ पहले श्रु के वश अथवा प के वश चलानयन करो ।

१२८। १२२ प्रक्रम में जो आर्किमिडिज़ का सर्पिल है उस में वक्रम को एक वक्रचाप और भ्रम को दूसरे वक्र का चापखण्ड मान लो

तो १२४ प्रक्रम की युक्ति से व्र भ्रम का फल = $\int_{\phi}^{\psi} \int_{\frac{f(\phi)}{f(\psi)}} \text{श्रु ताश्रु ताप}$

ऐसा होगा । यहाँ $f(\phi) = a\phi$ और $f(\psi) = a(\phi + 2\pi)$ मानो तो

$$\int_{\frac{f(\phi)}{f(\psi)}} \text{श्रु ताश्रु} = \frac{1}{2} \left[\{ f(\psi) \}^2 - \{ f(\phi) \}^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2} (a^2 \psi^2 + 4a^2 \psi \pi + 4a^2 \pi^2 - a^2 \phi^2) = \frac{a^2}{2} \left\{ (\phi + 2\pi)^2 - \phi^2 \right\}$$

$$\text{और } \int_{\frac{a^2}{2}} \left\{ (\phi + 2\pi)^2 - \phi^2 \right\} \text{ ताप} = \frac{a^2}{2} \left\{ \frac{(\phi + 2\pi)^3}{3} - \frac{\phi^3}{3} \right\}$$

इस लिये

$$\int_{\phi}^{\psi} \int_{\frac{f(\phi)}{f(\psi)}} \text{श्रुताश्रुताप} = \frac{a^2}{2} \left\{ \frac{(\phi + 2\pi)^3 - \phi^3}{3} - \frac{(\phi + 2\pi)^3 - \phi^3}{3} \right\}$$

$$= \frac{a^2}{2} \left\{ \frac{6\phi^2\pi + 12\phi\pi^2 + 8\pi^3 - 6\phi^2\pi - 12\phi\pi^2 - 8\pi^3}{3} \right\}$$

$$= \frac{a^2}{2} \left\{ 2\phi^2\pi + 4\phi\pi^2 - 2\phi^2\pi - 4\phi\pi^2 \right\} = \frac{a^2}{2} \left\{ 2\pi(\phi^2 - \phi^2) + 4\pi^2(\phi - \phi) \right\}$$

यह फल हुआ। इस में यदि $p_1 = 2n\pi$ और $p_2 = 2\pi(n-1)$ हो तो n और $n+1$ वार श्रु के फेरा करने में दोनों चापों के अन्तर का फल

$$\begin{aligned} &= \frac{a^2}{2} \left\{ 2\pi(p_2 - p_1) + 4\pi^2(p_2 - p_1) \right\} \\ &= \frac{a^2}{2} \left\{ 2\pi(2n^2\pi^2 - 2n^2\pi^2) + (n^2\pi^2 - 4n^2\pi^2) + 4\pi^2 \right\} \\ &= \frac{a^2}{2} (2\pi n^2\pi^2) = 2\pi n^2\pi^2 = 2\pi n \times 2\pi n^2\pi^2 = 2\pi n^3\pi^2 \end{aligned}$$

यही ठीक १२२वें प्रक्रम में भी उत्पन्न हुआ था परन्तु इस क्रिया से बहुत ही स्पष्ट रूप से उपपन्न होता है और १२२वें प्रक्रम में जो युक्ति लिखी है वह बड़े गाम्भीर्य विचार करने से तब मन में बैठती है ॥

१२९। अपचक्रालद के अक्षीय समीकरण पर से फलानयन । (११७

प्रक्रम का (३) समीकरण देखो) फल = आ = $\frac{1}{2} \int \frac{\text{लश्रुताश्रु}}{\sqrt{(\text{श्रु}^2 - \text{ल}^2)}}$

यहाँ क्षेत्र के लक्षण से $\text{ल} = \frac{g\sqrt{(\text{श्रु}^2 - \text{अ}^2)}}{\sqrt{(g^2 - \text{अ}^2)}}$ (८२ प्रक्रम देखो)

इस लिये फल = $\frac{1}{2} \int \frac{g\sqrt{(\text{श्रु}^2 - \text{अ}^2)}\text{श्रुताश्रु}}{\text{अ}\sqrt{(g^2 - \text{श्रु}^2)}} = \frac{g}{2\text{अ}} \int \frac{\sqrt{(\text{श्रु}^2 - \text{अ}^2)}\text{श्रुताश्रु}}{\sqrt{(g^2 - \text{श्रु}^2)}}$

= $\frac{g}{2\text{अ}} \int \frac{v^2\text{ताव}}{\sqrt{(g^2 - \text{अ}^2 - v^2)}}$ यदि $v^2 = \text{श्रु}^2 - \text{अ}^2$

अब $\int \frac{v^2\text{ताव}}{\sqrt{(g^2 - \text{अ}^2 - v^2)}} = \int \frac{v^2 - (g^2 - \text{अ}^2)}{\sqrt{(g^2 - \text{अ}^2 - v^2)}} \text{ताव}$

+ $(g^2 - \text{अ}^2) \int \frac{\text{ताव}}{\sqrt{(g^2 - \text{अ}^2 - v^2)}} = (g^2 - \text{अ}^2) \int \frac{\text{ताव}}{\sqrt{(g^2 - \text{अ}^2 - v^2)}}$

- $\int \sqrt{(g^2 - \text{अ}^2 - v^2)}\text{ताव} = \frac{g^2 - \text{अ}^2}{2} \text{ज्या}^{-2} \frac{v}{\sqrt{(g^2 - \text{अ}^2)}}$

- $\frac{v\sqrt{(g^2 - \text{अ}^2 - v^2)}}{2} = \frac{g^2 - \text{अ}^2}{2} \text{ज्या}^{-2} \frac{\sqrt{(\text{श्रु}^2 - \text{अ}^2)}}{\sqrt{(g^2 - \text{अ}^2)}}$

- $\frac{\sqrt{(\text{श्रु}^2 - \text{अ}^2)}\sqrt{(g^2 - \text{श्रु}^2)}}{2}$ इस पर से

$\text{अ} = \text{अ}$ और $\text{श्रु} = g$ इस के भीतर का मान = $\frac{g^2 - \text{अ}^2}{2}$ इस

को $\frac{g}{2a}$ से गुण देने से $\frac{g}{2a} \cdot \frac{g^2 - a^2}{2} \frac{\pi}{2}$ इस में g के स्थान में $a + 2k$ का उत्थापन देने से

$\frac{(a + 2k) k (a + k) \pi}{2a}$ इस को दूना करने से चलितवृत्त के एक वार घूम जाने से जो वक्र का अवयव और तत्सम्बन्धी श्रुतियों से उत्पन्न क्षेत्र का फल = $\frac{(a + 2k) k (a + k) \pi}{a}$ ।

यहां पर दोनों श्रुतियाँ स्थिरवृत्त के व्यासार्द्ध = a है और तदन्तर्गत स्थिरवृत्त का चाप चलितवृत्त के परिधि $2k\pi$ तुल्य है इस लिये उस वृत्तखण्ड का फल = $ak\pi$ इस को ऊपर के फल में घटा देने से स्थिरवृत्त के परिधि और वक्र चाप से उत्पन्न फल

$$= \frac{(a + 2k) k (a + k) \pi}{a} - ak\pi$$

$$= \frac{k(a^3 + 3ak + 2k^2) \pi - a^3 k \pi}{a} = \frac{\pi k^2}{a} (3a + 2k)$$

इसी तरह से अतिचक्रालद में यदि $a > k$ तो k का चिह्न बदल देने से फल $\frac{\pi k^2}{a} (3a - 2k)$ यह होगा ।

१३०। एक वक्र का फ $(\frac{y}{a}, \frac{r}{k}) = g \dots (१)$ यह समीकरण और दूसरे वक्र का फ $(y, r) = g$ यह समीकरण है इस को (२) कहो अब इन दोनों वक्रों के किसी साजात्य अवयव के फलों का सम्बन्ध जानना है ।

(१) में यदि $\frac{y}{a} = y$ और $\frac{r}{k} = r$ तो (१) में

$$\text{ताय} = \text{अताय} \text{ इस लिये (२) का फल} = \int r \text{ताय} = \int \frac{r}{k} \cdot \frac{\text{ताय}}{a} = \frac{१}{अक} \int \text{रताय}$$

अर्थात् (२) का फल = $\frac{१}{अक} \times$ (१) का फल

इस लिये $अक \times$ (२) का फल = (१) का फल ।

जैसे (१) दीर्घवृत्त में यदि केन्द्र को मूल बिन्दु मानो तो

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{r^2}{k^2} = १ \dots (१)$$

और वृत्त में $y^2 + r^2 = 1$ (जिस का व्यासार्द्ध = १ है) . . . (२)

इस लिये (२) का फल \times अक = (१) का फल

अर्थात् (१) का समग्र फल = (२) का समग्र फल \times अक = अक π
 $= \frac{अ}{क} अ^2 \pi$ यही पहले १०४ प्रक्रम में भी उत्पन्न हुआ था

(२) अतिपरवलय में $\frac{y^2}{अ^2} - \frac{r^2}{क^2} = 1$ (१)

और समातिपरवलय में $y^2 - r^2 = 1$ (२)

इस लिये (२) का फल \times अक = (१) का फल ।

(३) जिस वक्र का $\left[\frac{y^2}{अ^2} + \frac{r^2}{क^2} \right]^2 = \frac{y^2}{त^2} + \frac{r^2}{म^2}$ यह समीकरण है उस

के फल को जानना है । इस में यदि $y = अ^2$ और $r = क^2$ तो वक्र

के समीकरण का रूपान्तर $(य^2 + र^2)^2 = \frac{अ^2 य^2}{त^2} + \frac{क^2 र^2}{म^2}$ (२)

अब इस के फल को अक से गुण देने से अभीष्ट वक्र का फल ऊपर की युक्ति से हो जायगा ।

(२) के फल जानने के लिये इस का अक्षीय समीकरण बनाओ तो

$श्रु^2 = \frac{अ^2 य^2}{त^2} + \frac{क^2 र^2}{म^2}$, श्रु का भाग दे देने से

$श्रु = \frac{अ^2 कोज्या^2 \phi}{त^2} + \frac{क^2 ज्या^2 \phi}{म^2}$

इस लिये फल = $\frac{1}{2} \int श्रु^2 \phi = \frac{1}{2} \int \frac{अ^2 कोज्या^2 \phi}{त^2} \phi + \frac{1}{2} \int \frac{क^2 ज्या^2 \phi}{म^2} \phi$

$= \frac{अ^2}{२त^2} \int \frac{१ + कोज्या २\phi}{२} \phi + \frac{क^2}{२म^2} \int \frac{१ - कोज्या २\phi}{२} \phi$

$= \frac{अ^2}{२त^2} \int \left(\frac{\phi}{२} + \frac{ज्या २\phi}{४} \right) + \frac{क^2}{२म^2} \int \left(\frac{\phi}{२} - \frac{ज्या २\phi}{४} \right)$

ϕ का मान 0 और $\frac{\pi}{२}$ मानने से

चतुर्थांश फल = $\frac{अ^2}{२त^2} \frac{\pi}{४} + \frac{क^2}{२म^2} \frac{\pi}{४}$, इस को ४ गुना कर देने से समग्र

फल = $\frac{\pi}{२} \left[\frac{अ^2}{त^2} + \frac{क^2}{म^2} \right]$ और इस को अक से गुण देने से अभीष्ट वक्र

$$\text{का समग्र फल} = \frac{\text{अक}\pi}{२} \left[\frac{\text{अ}^२}{\text{त}^२} + \frac{\text{क}^२}{\text{म}^२} \right]$$

ऊपर के सिद्धान्त अर्थात् $f\left(\frac{y}{\text{अ}}, \frac{r}{\text{क}}\right) = \text{ग}$ । $f(y, r) = \text{ग}$ इस में यदि $\text{अ} = \text{क}$ तो (१) का फल = $\text{अ}^२ \times (२)$ का फल ऐसा होगा अर्थात् दोनों वक्र सजातीय होंगे और (२) के फल को $\text{अ}^२$ से गुण देने से (१) का फल होगा । देखो ऐसे दो वक्रों में सजातीय भुज वा कोटि में $\text{अ}:१$ का सम्बन्ध रहेगा और फल में $\text{अ}^२:१$ इस का सम्बन्ध । इस लिये रेखा-गणित से जैसा सजातीय ऋजुवहुभुज क्षेत्रों में धर्म सिद्ध होता है वैसे ही ऊपर की युक्ति से सजातीय वक्रों में भी सिद्ध हुआ ।

१३१। वक्र चाप और वक्र के अवलूत चाप से बने क्षेत्र का फलानयन । ९६ प्रक्रम के (१) और (२) क्षेत्र में v_1, v_2 को तनिक सा उठाया तो दूसरा वक्र-जातीयव्यासार्द्ध का मान होगा दोनों को बहुत पास होने से यदि तुल्य मानो और v_2 के पास ही चलित बिन्दु मानो और इन दोनों व्यासार्द्धों से उत्पन्न कोण का मान v_2 मान लो तो स्वल्पान्तर से दोनों व्यासार्द्ध, और वक्र का चाप इन से बने वृत्तखण्ड का फल $\Delta \text{आ} = \frac{१}{३} v_2^3 \Delta v_2$,

$$\text{और } \frac{\Delta \text{आ}}{\Delta v_2} = \frac{१}{३} v_2^2 \text{ अब इस में } \Delta v_2 = ० \text{ मानो ती ठीक ठीक } \frac{\text{ताआ}}{\text{ता}v_2}$$

$= \frac{१}{३} v_2^2$ यह अभीष्ट क्षेत्र के फल का तात्कालिक सम्बन्ध $\text{ता}v_2$ के वश से उत्पन्न हुआ ।

यहाँ यदि आ को अवलूत का चाप, वक्र का चाप, और दो वक्रजातीय-व्यासार्द्ध इन से बने क्षेत्रका क्षेत्रफल समझो और दोनों वक्रजातीयव्यासार्द्ध सम्बन्धी v_2 का मान v_2 , v_2 मान लो तो

$$\text{आ} = \frac{१}{३} \int_{v_2} v_2^3 v_2^2 \text{ ता}v_2 \text{ यह होगा}$$

यहाँ v_2 वक्रजातीयव्यासार्द्ध के स्थान में $v_2 = \frac{\text{ताआ}}{\text{ता}v_2}$ (चलन-

कलन के १७१वें प्रक्रम से) इस का उत्थापन दे दें तो

$$\text{आ} = \frac{१}{३} \int v_2 \text{ ताआ} = \frac{१}{३} \int v_2 \frac{\text{ताआ}}{\text{ता}v_2} \text{ ता}v_2 \text{ ऐसा होगा}$$

१३२। कातन्वली उसका अवलूत और वक्रजातीय दो व्यासार्द्ध इन से बने क्षेत्र का फलानयन ।

यहाँ चा = ग· स्पव_r (१४ प्रक्रम से)

इस लिये $\frac{\text{ताचा}}{\text{ताव}_r} = \text{वि} = \text{ग छे}^v \text{व}_r$

$$\begin{aligned} \text{और आ} &= \frac{1}{2} \int_{\text{व}_2}^{\text{व}_1} \text{वि}^2 \text{ता व}_r = \frac{1}{2} \int_{\text{व}_2}^{\text{व}_1} \text{ग छे}^v \text{व}_r \text{ता व}_r \\ &= \frac{\text{ग}^2}{2} \int_{\text{व}_2}^{\text{व}_1} \text{छे}^v \text{व}_r \text{ता व}_r \end{aligned}$$

यहाँ $\int \text{छे}^v \text{व}_r \text{ता व}_r = \text{स्पव}_r + \frac{1}{2} \text{स्प}^2 \text{व}_r + \text{स्थि}$

इस पर से व₁, व₂ का इष्टमान मानने से अभीष्ट क्षेत्र का फल जान सकते हो ।

१३३। वक्र के प्रतिविन्दु सम्बन्धि स्पर्शरेखाओं के ऊपर कोई स्थिर विन्दु से (जो कि उसी धरातल में है जिस में कि वक्र है) लम्ब डालें और इन लम्बमूलों में लगाकर एक वक्र रेखा कर दें तो इस वक्र को पहले वक्र का पाददल कहते हैं ।

जिस स्थिरविन्दु से लम्ब डाले गये हैं इसको पाददल का मूलविन्दु कहते हैं और जिस वक्र का पाददल वक्र बनावोगे उसे पाददल का मूलवक्र कहते हैं ।

१३४। पिछले प्रक्रमों से स्पष्ट है कि मूलविन्दु से पाददल के मूलवक्र के कोई दो स्पर्शरेखाओं पर दो लम्ब डाले जायँ तो पाददल का चाप और इन दोनों लम्बों से बने क्षेत्र का फल = $\frac{1}{2} \int \text{ल}^2 \text{ताव}$ (जहाँ कोई नियत रेखा और लम्ब से उत्पन्न कोण = ϕ है) क्योंकि पाददल में मूल वक्र के स्पर्शरेखा पर जो मूलविन्दु से लम्ब डाला जायगा वह लम्बही श्रुति होगी ।

कल्पना करो कि अ, अ' दो मूलविन्दुओं से दो पाददल एकही मूलवक्र से बने हैं । और मूलवक्र के किसी दो स्पर्शरेखा पर दोनों मूलविन्दुओं से ल, ल' लम्ब डाले गये हैं । नियतरेखा समानान्तर है । अ मूलविन्दु से अ' की श्रुति, श्रु और श्रु और नियतरेखा से उत्पन्न कोण ϕ_1 है तो ϕ के दो मानों के भीतर पहले पाददल का फल = आ = $\frac{1}{2} \int \text{ल}^2 \text{ताव}$, और ϕ के उन्हीं दो मानों के भीतर दूसरे

$$\text{पाददल का फल} = \text{आ}' = \frac{1}{2} \int \text{ल}'^2 \text{ताव}$$

$$\text{परन्तु ल}' = \text{ल} - \text{श्रु कोज्या} (\phi - \phi_1)$$

इस लिये $ल^३ = ल^३ + २लश्रु कोज्या (ष-प_१) + श्रु^३ कोज्या^३(ष-प_१)$

इस लिये $आ = \frac{३}{२} \int ल^३ ताष - \int श्रुलकोज्या (ष-प_१) ताष$

$= \frac{३}{२} \int श्रु^३ कोज्या^३ (ष-प_१) ताष$

$= आ - \int लश्रुकोज्या (ष-प_१) ताष + \frac{३}{२} \int श्रु^३ कोज्या^३ (ष-प_१) ताष$

$= आ - \int लश्रु (कोज्या_१ कोज्या_१ + ज्या_१ ज्या_१) ताष$

$+ \frac{३}{२} \int श्रु^३ (कोज्या_१ कोज्या_१ + ज्या_१ ज्या_१)^३ ताष$

$= आ - \int ल(यकोज्या_१ + रज्या_१) ताष$

$+ \frac{३}{२} \int (य^३ कोज्या_१^३ + यरज्या_१^३ + र^३ ज्या_१^३) ताष$

यदि $य = श्रुकोज्या_१$ । $र = श्रुज्या_१$ (१)

(१) में $\int लकोज्या_१ ताष = च$, $\int लज्या_१ ताष = ज$

$\frac{३}{२} \int कोज्या_१^३ ताष = त$, $\frac{३}{२} \int ज्या_१^३ ताष = न$, $\frac{३}{२} \int ज्या_१ कोज्या_१ ताष = म$

इन का उत्थापन दे देवो जहाँ सर्वत्र $प$ की दोनों सीमायें एकही हैं

तो $आ = आ - (च + ज) + त + न + म + र$ (२)

१३५। कल्पना करो कि किसी वक्र का $अय^३ + कयर + गर^३ + घय + चर + फ = ०$ यह समीकरण है। इच्छा है कि यह पता लगावें कि यह कौन सा वक्र है।

यदि यह वक्र मूलविन्दु में भी गया होगा तो स्पष्ट है कि $फ = ०$ । कल्पना करो कि मूलविन्दु में नहीं गया है तब $फ$ का दोनों पक्षों में भाग देने से लघ्विओं को क्रम से $अ$, $क$ इत्यादि मान लेने से ऊपर के समीकरण का रूप

$$अ^३ + क^३ यर + गर^३ + घय चर + १ = ०$$

जिस विन्दु का वक्र के मूलविन्दु से $त, द$ भुज कोटि हैं उसको मूलविन्दु मानने से वक्र का $भु = य = य^३ + त$, $र = र^३ + द$ इनका उत्थापन

$$अय^३ + कयर + गर^३ + घय + चर + फ = ० \dots \dots (१)$$

इस में देने से

$$अ(य^३ + २तय + त^३) + क(यर^३ + य^३ द + र^३ त + त^३ द) + ग(र^३ + २र^३ द + द^३)$$

$$+ घय + घत + चर + चद + फ$$

$$= अय^३ + २तअय + अत^३ + कयर^३ + कदय^३ + कत^३ + कतद + गर^३ + २गरद$$

$$+ गद^३ + घय + घत + चर + चद + फ$$

$$= अय^३ + कयर^३ + गर^३ + (२तअ + कद + घ)य^३ + (२गरद + कत + च)र^३ + फ = ० \dots (२)$$

$$जहाँ $फ = अत^३ + कतद + घत + चद + फ$, \dots \dots (३)$$

कल्पना करो कि इस में सम्भव है कि त, और द के ऐसे मान हैं कि य^१ र^१ के गुणक शून्य के तुल्य होते हैं तो

$$२तअ + कद + घ = ० \text{ और } २गद + कत + ब = ०$$

$$\text{इन परसे } त = \frac{२गघ - कच}{क - ४अग}, \text{ और } द = \frac{२अग - कघ}{क - ४अग}$$

इस लिये निश्चय हुआ कि यदि क^१-४अग यह शून्य के तुल्य न हो तो त, द का मान ऐसा मान सकते हैं जिस पर से य^१, र^१ के गुणक शून्य हों। पहले मानो कि क^१-४अग यह शून्य नहीं है तो त, द के मान भी सान्त होंगे। और तब (२) का रूप अय^१ + कय^१ + गर^१ + फ^१ = ० (४)

अब यह (४) समीकरण दिखलाता है कि धन, य^१, र^१ के वा, ऋण य^१, र^१ के मान में फल एक ही होगा इस लिये (१) समीकरण के वक्र का दूसरा मूलविन्दु (जिस का भु = त, को = द प्रथम मूलविन्दु के अभिप्राय से है) केन्द्र होगा।

त, द के मान का उत्थापन (३) में देने से

$$फ^१ = फ + \frac{गघ^१ + अग^१ + कगघ}{क - ४अग} \text{ ऐसा होगा।}$$

(४) में स्वर चिह्न उड़ा देने से

$$अय^१ + कय^१ + गर^१ + फ = ०, (५)$$

इस में कल्पना करो कि मूल विन्दु तो वही है परन्तु य अक्ष नया पहले य अक्ष से ष तुल्य कोण बनाने वाली रेखा को माना और इस पर मूल विन्दु पर जो रेखा लम्ब होगी वह नया र अक्ष माना तो इन अक्ष सम्बन्धी भुज = य^१, को = र^१ तो पहले अक्ष सम्बन्धी

य = य^१कोज्या^१ — र^१ज्या^१, र = य^१ज्या^१ + र^१कोज्या^१, इन का उत्थापन (५) में देने से

$$\begin{aligned} & य^१(अकोज्या^१ + गज्या^१ + कज्या^१कोज्या^१) \\ & + र^१(अज्या^१ + गकोज्या^१ - कज्या^१कोज्या^१) \\ & + य^१र^१ \{ २(ग - अ)ज्या^१कोज्या^१ + क(कोज्या^१ - ज्या^१) \} + फ^१ = ०, \dots (६) \end{aligned}$$

मान लो कि य^१र^१ का गुणक शून्य है तो

$$\begin{aligned} & २(ग - अ)ज्या^१कोज्या^१ + क(कोज्या^१ - ज्या^१) = ० \\ & = (ग - अ)ज्या^२ + ककोज्या^२ \end{aligned}$$

$$\text{इस लिये स्पर्श} = \frac{क}{अ-ग}, \dots \dots \dots (१)$$

(७) वाँ दिखलाता है कि सर्वदा ϕ का मान ऐसा मान सकते हैं जिस में y^1 का गुणक शून्य हो। y^1 के गुणक को शून्य करने से (६) वें का रूप y^2 (अकोज्या^२ ϕ + गज्या^२ ϕ + कज्या ϕ कोज्या ϕ)

$$+ r^2(\text{अज्या}^2\phi + \text{गकोज्या}^2\phi - \text{कज्या}\phi\text{कोज्या}\phi) + \phi^2 \\ = \text{आ}y^2 + \text{का}r^2 + \phi^2 = 0, \quad \dots \dots \dots (८)$$

$$\text{जहाँ आ} = \frac{1}{2} \{ \text{अ} + \text{ग} + (\text{अ}-\text{ग})\text{कोज्या}2\phi + \text{कज्या}2\phi \}$$

$$\text{का} = \frac{1}{2} \{ \text{अ} + \text{ग} - (\text{अ}-\text{ग})\text{कोज्या}2\phi - \text{कज्या}2\phi \}$$

$$\text{परन्तु स्पर्श} = \frac{\text{क}}{\text{अ}-\text{ग}} \therefore \text{कोज्या}2\phi = \frac{\text{अ}-\text{ग}}{\sqrt{\{\text{क}^2 + (\text{अ}-\text{ग})^2\}}}$$

और ज्या $2\phi = \frac{\text{क}}{\sqrt{\{\text{क}^2 + (\text{अ}-\text{ग})^2\}}}$ इन का उत्थापन देने से

$$\text{आ} = \frac{1}{2} [\text{अ} + \text{ग} + \sqrt{\{\text{क}^2 + (\text{अ}-\text{ग})^2\}}]$$

$$\text{का} = \frac{1}{2} [\text{अ} + \text{ग} - \sqrt{\{\text{क}^2 + (\text{अ}-\text{ग})^2\}}]$$

y^1 के स्वर चिह्न को उड़ा देने से और ϕ का भाग देकर पक्षान्तरानयन से

$$(८) \text{ वें का रूप } - \frac{\text{आ}}{\phi} y^2 - \frac{\text{का}}{\phi} r^2 = 1 \text{ यह समीकरण दिखलाता है}$$

कि यदि

(१) आ, का, ϕ एक ही चिह्न के होंगे तो वक्र असम्भव होगा ।

(२) यदि आ, का एक ही चिह्न के हों और उस से विरुद्ध चिह्न ϕ का हो तो वक्र दीर्घवृत्त होगा जिस के व्यासार्द्ध क्रम से $\sqrt{(-\frac{\phi}{\text{आ}})}$, $\sqrt{(-\frac{\phi}{\text{का}})}$ हैं।

(३) यदि आ, का विजातीय चिह्न के हों तो वक्र अतिपरवलय होगा ।

(४) यदि आ = का और एक चिह्न के हों और उन से विजातीय ϕ हो तो वक्र वृत्त होगा ।

(५) यदि $\phi = 0$ तो (८) वें समीकरण पर से $\text{आ}y^2 + \text{का}r^2 = 0$ इस लिये वक्र मूलविन्दुरूप होगा यदि आ, का एक ही चिह्न के हों और यदि भिन्न चिह्न के हों तो वक्र दो सरलरेखा रूप होगा जिन का समीकरण $r = \pm \sqrt{(-\frac{\text{आ}}{\text{का}})} y$ यह होगा।

ऊपर जो आ, का का मान ले आये हैं उन का यदि घात करो तो

$$\text{आ} \times \text{का} = \frac{(\text{अ} + \text{ग})^2 - \text{क}^2 - (\text{अ} - \text{ग})^2}{4} = \frac{4\text{अग} - \text{क}^2}{4}$$

इस लिये यदि आ, का भिन्न भिन्न चिह्न के होंगे तो ४अग-कं यह ऋणात्मक होगा अन्यथा धन होगा ।

इस लिये यदि वक्र असम्भव और विन्दुरूप न हो और वृत्त को भी एक प्रकार का दीर्घवृत्त ही समझें जिस का कि दोनों व्यासार्द्ध तुल्य हैं तो कह सकते हैं कि यदि ४अग-कं यह धनात्मक हो तो वक्र दीर्घवृत्त होगा यह सिद्धान्त हुआ । इस में ४अग-कं यह जब शून्य के तुल्य होगा तब त, और द के मान अनन्त होंगे इस स्थिति में वक्र का केन्द्र अनन्त दूर पर होगा अर्थात् वक्र परवलय ठहरेगा । इस में और भी अनेक विचार और सिद्धान्त हैं जिन का वर्णन करना चलराशिकलन में व्यर्थ है ।

१३६। १३४ प्रक्रम (२) समीकरण में यदि पक्षान्तरानयन करो तो तय^२ + २मयर + नर^२ - चय - जर - (आ - आ) = ० ऐसा होगा ।

इस की यदि १३५ प्रक्रम के (१) समीकरण के साथ तुलना करो तो अ = त, २म = क, ग = न, घ = —च, च = —ज, फ = —आ—आ ऐसा होगा । इस लिये

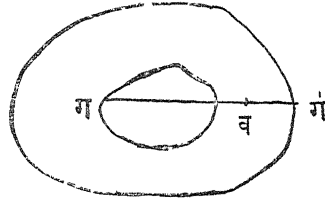
$$\begin{aligned} ४अग-कं &= ४तन-४मं = ४(तन-मं) \\ &= (\surdकोज्या^२पताष) (\surdज्या^२पताष) - (\surdज्यापकोज्यापताष)^२ \end{aligned}$$

परन्तु यहाँ दहना पक्ष चतुर्थाध्याय के १९ वें प्रश्न से धनात्मक होगा इस लिये उन पाददलों के मूलविन्दु सब एक दीर्घवृत्त के परिधि में होंगे जो मूलवक्र के नियत दो स्पर्शरेखान्तर्गत लम्ब और अपने चाप से तुल्य फल बनाते हैं । यदि इस दीर्घ वृत्त के भुज कोटि को इस के केन्द्र से गणना करें तो ऊपर के प्रक्रम की युक्ति से य, और र के गुणक शून्य होंगे अर्थात् च = ०, और ज = ० । इस लिये अनुमान कर सकते हो कि कोई पाददल का मूलविन्दु ऐसा भी होगा जिसमें च = ०, ज = ० । कल्पना करो कि अ के बदले इस को प्रथम मूलविन्दु माना तो १३४ प्रक्रम के (१) समीकरण से

$$आ = आ + \frac{१}{३} \surdश्रुकोज्या^२ (ष-प)ताष \text{ ऐसा होगा}$$

यहाँ दहने पक्ष का दूसरा खण्ड सर्वदा धनात्मक है इस लिये आ का मान आ से सर्वदा अधिक होगा । इस पर से यह सिद्ध होता है कि जिस पाददल के मूलविन्दु से च = ०, ज = ० हों उस का फल सब से छोटा होगा ।

१३७। निर्दिष्ट लम्बाई की गग रेखा है इस का एक अग्र ग छोटे वक्र की परिधि पर और दूसरा अग्र बड़े वक्र की परिधि पर घूमता है इस लिये इस तरह से गग रेखा के घूमने से गग रेखास्थ व विन्दु भी किसी वक्र में घूमेगा। इच्छा है कि इस व विन्दु के वक्र का फल ग और ग विन्दु के वक्रों के फलों से जानें।



कल्पना करो कि गव = ग, वग = ग और कोई परस्पर लम्बरूप अक्षों के वश से y_1, r_1, y_2, r और y_2, r_2 क्रम से ग, व, और ग के भुज कोटि हैं। गग रेखा और र अक्ष से उत्पन्न कोण प समझो तो चलनकलन के ११ वें अध्याय से।

$$y_1 = y - गज्याष, r_1 = r - गकोज्याष ।$$

$$y_2 = y + गज्याष, r_2 = r + गकोज्याष ।$$

$$\text{इस लिये ताय}_1 = \text{ताय} - गकोज्याषताय$$

$$\text{और } r_2 \text{ ताय}_1 = (r - गकोज्याष) (\text{ताय} - गकोज्याषताय)$$

$$= \text{रताय} - गकोज्याष (\text{रताय} + \text{ताय}) + ग^2 \text{कोज्या}^2 \text{पताय}$$

इसी तरह $r_2 \text{ताय}_2 = \text{रताय} + गकोज्याष (\text{रताय} + \text{ताय}) + ग^2 \text{कोज्या}^2 \text{पताय}$ पहले को ग और दूसरे को ग से गुण कर जोड़ देने से

$$\text{ग} r_2 \text{ताय}_1 + \text{ग} r_2 \text{ताय}_2 = (\text{ग} + ग) \text{रताय} + (\text{ग} + ग) \text{गग} \text{कोज्या}^2 \text{पताय}$$

$$\therefore \text{ग} \int r_1 \text{ताय}_1 + \text{ग} \int r_2 \text{ताय}_2 = (\text{ग} + ग) \int \text{रताय}$$

$$+ (\text{ग} + ग) \text{गग} \int \text{कोज्या}^2 \text{पताय}$$

$$= (\text{ग} + ग) \int \text{रताय} + (\text{ग} + ग) \text{गग} \int \frac{१ + \text{कोज्या}^2 \text{प}}{२} \text{ताय}$$

$$= (\text{ग} + ग) \int \text{रताय} + (\text{ग} + ग) \text{गग} \left(\frac{\pi}{२} + \frac{\text{ज्या}^2 \text{प}}{४} \right)$$

यदि गग रेखा एक वार पूरा भ्रमण कर फिर अपने स्थान पर पहुँचे तो स्पष्ट है कि $\pi, 0$ और २π के बीच होगा, इस लिये सान्तचलानयन से

$$\text{ग} (\text{गा}) + ग (\text{गा}) = (\text{ग} + ग) (\text{वा}) + (\text{ग} + ग) \text{गग} \pi$$

$$= \frac{\text{ग} (\text{गा}) + ग (\text{गा})}{\text{ग} \times \text{ग}} = (\text{वा}) + \pi \text{गग}, \text{ यहाँ } (\text{गा}), (\text{वा}), (\text{गा}), \text{ क्रम से ग, व, ग}$$

विन्दुसम्बन्धि वक्रों के सम्पूर्ण फल हैं।

यदि ग, ग रेखा के अग्र एकही वक्र की परिधि पर घूमे तो $(\text{गा}) = (\text{गा})$

(गा) = (वा) + π गर्ग और (गा) - (वा) = π गर्ग इसलिये वक्र की परिधि और व विन्दूपन्न वक्र की परिधि के बीच जो क्षेत्र होगा उस का फल π गर्ग यह होगा ।

ग, ग^१ विन्दु, घूमने के बदले झूल कर उलटा झलुअे के ऐसा यदि फिर पीछे से अपने स्थान पर पहुँचे तो स्पष्ट है कि (गा^१) = ०, (गा) = ० इसलिये (वा) = - π गर्ग । ऋण चिह्न दिखलाना है कि जिधर गर्ग^१ रेखा घूमती है उस से विरुद्ध दिशा से फल उत्पन्न हुआ है । यदि घूमने के बदले गर्ग^१ रेखा ही आगे पीछे चले तो (वा) = ० इस से सिद्ध होता है कि व विन्दु से दो तुल्य फन्दे के ऐसे वक्र होंगे जिन में एक धनात्मक दूसरा इस से उलटा ऋणात्मक होगा ।

१३८। जिन वक्रों में भुज का कौन फल कोटि है इस का ज्ञान न हो वा ./ र ताय इस के मान का ठीक ठीक पता न लगे वहाँ स्वल्पान्तर से भुज का अनेक समान खण्ड कर प्रति भागों पर लम्ब खड़ा करने से अनेक पास पास में दो दो कोटि और तदन्तर्गत भुजखण्ड और वक्र की पूर्णज्या से समलम्ब चतुर्भुज बनाकर पृथक् पृथक् फल साधन कर सब का योग करो तो वक्रक्षेत्र का आसन्न फल होगा । (५)वें प्रक्रम से स्पष्ट है कि भुज का जितनाही अधिक विभाग करोगे उतनाही सूक्ष्म फल होगा ।

(१) कल्पना करो कि भुज का न खण्ड जो समान कर डाला उसका मान = च और कोटियों का मान $r_0, r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$

तो स्पष्ट है कि जितने समलम्बचतुर्भुज होंगे सभों में आद्यन्त कोटियों को छोड़ और सब कोटियाँ एक वार आधार दूसरे वार मुख होंगी और लम्ब सर्वत्र च यही रहेगा ।

इस लिये r_0, r_n दो कोटि, तदन्तर्गत भुजान्तर, और वक्र का चाप इन से बने

क्षेत्र का आसन्न फल = च $\left\{ \frac{r_0 + r_n}{2} + r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_{n-1} \right\}$ यह होगा ।

इस पर से यह फल जानने के लिये क्रिया उत्पन्न होती है कि आद्यन्त कोटि के योगार्द्ध में और बीचवाली सब कोटियों को जोड़ दो योग को भुजखण्ड च से गुणदेने से वक्र का स्वल्पान्तर से फल होगा ।

(२) कल्पना करो कि एक ऐसा परवलय है जिसका मूलविन्दु r_0 कोटि का मूल, और समीकरण $r = अ + कय + गय^२$ यह है और यह, वक्र

के r_0, r_1, r_2 , कोट्यग्र पर होके जाता है तो $r_0 = अ - कच + गच^2$,
 $r_1 = अ$, $r_2 = अ + कच + गच^2$

$$\text{और पहली और तीसरी कोटि के बीच फल} = \int_{-च}^{च} (अ + कय + गय^2) ताय$$

$$= २ च \left(अ + ग \frac{च^3}{३} \right)$$

परन्तु $r_0 + r_2 = २r_1 + २गच^2$ इस लिये

$$\text{फल} = \frac{च}{३} \{ r_0 + ४r_1 + r_2 \}$$

अब समझो कि न का मान सम है अर्थात् r_0, r_n कोटि के बीच भुजान्तर का सम विभाग किया है तो ऊपर की युक्ति से तीन तीन कोट्यग्र पर गये हुए परवलयों के फल

$$\frac{च}{३} \{ r_2 + ४r_1 + r_0 \}, \frac{च}{३} \{ r_4 + ४r_3 + r_2 \}, \frac{च}{३} \{ r_6 + ४r_5 + r_4 \} \dots \text{इत्यादि होंगे}$$

इस लिये इन सब फलों का योग

$$\frac{च}{३} \{ r_0 + r_n + ४(r_1 + r_3 + r_5 + \dots) + २(r_2 + r_4 + r_6 + \dots) \}$$

यह स्वल्पान्तर से वक्र का फल हुआ।

इस पर से यह क्रिया उत्पन्न होती है कि r_0, r_n के बीच य अक्ष का समान भाग कर कोटियों का मान जानलो फिर आद्यन्त कोटियों के योग में चौगुना अवशिष्ट विषम कोटियों का योग और दूना बाकी कोटियों का योग मिला कर तीन से भाग देदो लब्धि को च से अर्थात् दो कोटियों के बीच के अन्तर से गुण दो तो गुणनफल स्वल्पान्तर से वक्र का फल होगा।

इस रीति को सिम्पशन ने सन् १७४३ में निकाला है इसी लिये इसे सिम्पशन की रीति (Simpson's Rule) कहते हैं (See Simpson's mathematical Dissertations 1743, page 109)

इस के लिये एक उदाहरण दिखाते हैं। कल्पना करो कि जिस वक्र का $r = \frac{१}{१ + य^२}$ यह समीकरण है उस का फल सिम्पशन की रीति से जानना है $r_0 = १, r_n = \frac{१}{३}$ इस के बीच में।

यहाँ $r_0 = १$ तब $य = ०$, और $r_n = \frac{१}{३}$, तब $य = १$, मानो कि $n = १०$
 इस लिये $च = \frac{१}{१०} = ०.१$, और

$$r_1 = \frac{1}{1.01} = 0.99009901, r_2 = \frac{1}{1.02} = 0.980392156$$

$$r_3 = \frac{1}{1.03} = 0.970873786, r_4 = \frac{1}{1.04} = 0.961538462, r_5 = \frac{1}{1.05} = 0.952380952$$

$$r_6 = \frac{1}{1.06} = 0.943396226, r_7 = \frac{1}{1.07} = 0.934579439, r_8 = \frac{1}{1.08} = 0.925925926$$

$$r_9 = \frac{1}{1.09} = 0.917431193, r_{10} = \frac{1}{1.1} = 0.909090909$$

$$1.00000000$$

$$\underline{0.90909090}$$

$$\text{इस लिये } r_0 + r_{10} = 1.90909090$$

$$r_1 = 0.99009901$$

$$r_2 = 0.980392156$$

$$r_3 = 0.970873786$$

$$r_4 = 0.961538462$$

$$r_5 = 0.952380952$$

$$r_6 = \underline{0.943396226}$$

$$\text{सब का योग} = 3.93115733$$

४

$$\text{४}(r_1 + r_2 + r_3 + \dots) = 15.72462932$$

$$r_2 = 0.980392156$$

$$r_3 = 0.970873786$$

$$r_4 = 0.961538462$$

$$r_5 = \underline{0.952380952}$$

$$3.93115733$$

२

$$6.33729236 = 2(r_2 + r_3 + r_4 + r_5)$$

$$15.72462932 = 4(r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5)$$

$$\underline{1.90909090} = r_0 + r_{10}$$

$$\text{यो} = 23.96119276$$

$$= r_0 + r_{10} + 4(r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5) + 2(r_2 + r_3 + r_4 + r_5)$$

फल = $\frac{च \times यों}{३} = .७८५३९७५८९$ इस में यदि ६ स्थान तक ग्रहण

करें तो .७८५३९८ यह मान होगा

परन्तु $\frac{१}{१+y^२} = r$ इस वक्र का y के ० और १ के बीच मान में चलानयन

की रीति से ठीक फल $\int_0^1 \frac{ताय}{१+y^२} = \frac{\pi}{४} = \frac{३.१४१५९२६५\dots}{४} = .७८५३९८\dots$

यह हुआ इस लिये यदि यहाँ भी दशमलव का मान ६ स्थान तक लें तो सिम्पशन की रीति से बहुत ही ठीक ठीक फल आया यह प्रत्यक्ष देखने में आता है ।

(३) प्रत्येक दो कोटियों के बीच में जो भुजान्तर च माना है उसे २ ज के तुल्य मानें और कल्पना करें कि एक प्रकार के परवलय का $r = अ + कय + गय^२ + घय^३$ यह समीकरण है जो कि $r_०, r_१, r_२, r_३$ इन चार कोट्यग्र पर होकर जाता है और जिसका मूलविन्दु y अक्ष में $r_१, r_२$ कोटियों के बीच में है तो

$$r_० = अ - ३ कज + ९ गज^२ - २७ घज^३$$

$$r_१ = अ - कज + गज^२ - घज^३$$

$$r_२ = अ + कज + गज^२ + घज^३$$

$$r_३ = अ + ३ कज + ९ गज^२ + २७ घज^३$$

इस लिये $r_० + r_३ = २(अ + ९ गज^२)$, $r_१ + r_२ = २(अ + गज^२)$

$$\therefore अ + ९ गज^२ = \frac{r_० + r_३}{२} \dots \dots \dots (१)$$

$$अ + गज^२ = \frac{r_१ + r_२}{२} \dots \dots \dots (२)$$

$अ + ५ गज^२ = \frac{r_० + r_३ + r_१ + r_२}{४}$ । (१) और (२) को जोड़कर २का भाग देने से

$$इस लिये $२अ + ६ गज^२ = \frac{r_० + r_३ + ३r_१ + ३r_२}{४} \dots \dots \dots (३)$$$

परन्तु परवलयका $r_०, r_३$ कोटिसीमा से फल = $\int_{-३ज}^{३ज} (अ + कय + गय^२ + घय^३) ताय$

$$= ३ज(२अ + ६ गज^२) = \frac{३ज}{४} \{ r_० + r_३ + ३(r_१ + r_२) \}$$
, ज के स्थान में $\frac{३ज}{४}$ का

उत्थापन देने से फल = $\frac{३ज}{४} \{ r_० + r_३ + ३(r_१ + r_२) \}$

इसी तरह $r_३, r_०, r_१, r_२$ के अग्र पर गये परवलय का $r_३, r_०$ कोटि के बीच

में फल $\frac{3}{2} \{ r_2 + r_4 + 3(r_0 + r_4) \}$ इसी तरह चार चार कोट्यग्र पर गये हुए परवलयों के फल, $\frac{3}{2} \{ r_4 + r_0 + 3(r_0 + r_4) \}$, $\frac{3}{2} \{ r_1 + r_{12} + 3(r_{10} + r_{12}) \}$ इत्यादि होंगे । यदि अभीष्ट वक्र के फल को इन परवलयों के फल योग तुल्य स्वल्पान्तर से मान लो तो वक्र का फल $= \frac{3}{2} \{ r_0 + r_n + 2(r_2 + r_4 + r_6 + r_{12} + \dots) + 3(r_1 + r_3 + r_5 + r_7 + \dots) \}$ यह हुआ । इस पर से यह रीति उत्पन्न होती है कि आद्यन्त कोटि योग में r_0 के आगे तीसरी तीसरी कोटियों का दूना योग और बाकी कोटियों का तिगुना योग मिला दो । योग को च के $\frac{3}{2}$ से गुण देने से वक्र का फल हो जायगा ।

इस को भी सिम्पशन की रीति कहते हैं परन्तु वास्तव में यह न्यूटन का निकाला हुआ है (See Opuscula, method. Diff., Prop. 6 Scolium) ऊपर की रीतियों में कोटि की संख्या ज्यों ज्यों बढ़ाते जायेंगे त्यों त्यों फल सूक्ष्म आवेगा ।

१३९। किसी वक्र में सिद्ध है कि $y = \text{श्रु कोज्याप}$, $r = \text{श्रु ज्याप}$ इस लिये

$$\text{स्पप} = \frac{r}{y} \text{ और तास्पप} = \frac{\text{ताप}}{\text{कोज्या}^2 \text{प}} = \frac{\text{यतार} - \text{रताय}}{y^2}$$

इस लिये $\text{श्रु}^2 \text{ताप} = \text{यतार} - \text{रताय}$

$$\text{और } \int \text{श्रु}^2 \text{ताप} = \int (\text{यतार} - \text{रताय})$$

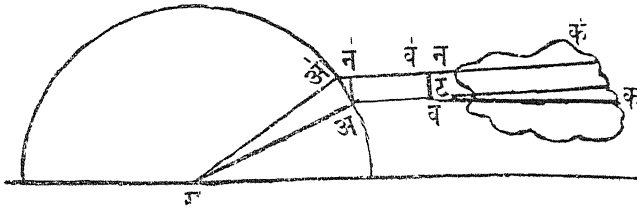
इस पर से सिद्ध होता है कि $\int \text{श्रु}^2 \text{ताप}$ इस के स्थान में

$\int (\text{यतार} - \text{रताय})$ इस को लेकर भी उचित सीमाओं के भीतर फल साधन कर सकते हैं ।

१४०। वक्र रेखा से घिरे हुए किसी क्षेत्र के फल जानने के लिये बुद्धिमानों ने यान्त्रिक विद्या के बल से यन्त्र बनाये हुए हैं इस यन्त्र को धरातलमापक (Planimeters) कहते हैं यह कई प्रकार के हैं उन में प्रोफेसर आमस्टलर (Professor Amstler of Schaffhausen) का सब से सहज और उत्तम है । इस में दो भुज ऐसे जुटे हुए हैं कि स्वतन्त्र एक धरातल में घुस सकते हैं । एक भुज के अग्र पर एक विन्दु स्थिर बनी हुई है जिस के चारो ओर यन्त्र फिरा

करता है इस लिये इस विन्दु को यन्त्र का केन्द्र कहते हैं। इस यन्त्र में एक पहिये के ऐसा चक्र भी लगा हुआ है जो दूसरे भुज में सटा हुआ इस भुज पर लम्बरूप फिरा करता है और उन वक्रों के क्षेत्रफल के मान भी इस में अङ्कित हैं जो कि दूसरे भुज किसी विन्दु के चलने से उत्पन्न होते हैं। इस चक्र की रचना से स्पष्ट है कि यह दूसरे भुज पर जो लम्ब है उसके गमनमान को केवल बताता है जिस के ज्ञान से वक्र का फल भी जान सकते हैं।

जिस वक्र का फल जानना हो उस की परिधि के एक विन्दु पर दूसरे भुज का क अग्र रखो फिर इस में लगे हुए चक्र को जो कि पहले दोनों भुजों के सम्पात विन्दु अ पर था क की ओर घसकाते और आगे बढ़ाते जाओ जिस में इस के साथ साथ गअ और अक भुज ऐसा घूमें कि क विन्दु अभीष्टवक्र की परिधि पर ही सर्वदा रहे इस प्रकार से जब वक्र के सब परिधि पर क विन्दु घूम कर फिर अपने पहले स्थान पर आवे उस समय चक्राङ्कित संख्या जो सामने में हो वही वक्र का फल समझना।



इस में पहले यह दिखलाते हैं कि सर्वदा अ विन्दु पर चक्र के स्थिर रहने से जो लम्ब के गमन का प्रमाण होगा वही चाहे अक में चक्र जहाँ रहे सर्वत्र होगा।

कल्पना करो कि चक्र का केन्द्र व विन्दु पर पहुँचा और जब अक की क विन्दु चल कर बहुत ही पास के क विन्दु पर पहुँची उस समय यन्त्र के भुज गअ, अक रूप हुए और तब चक्र का केन्द्र व विन्दु पर पहुँचा। अक, अक को बहुत ही पास पास समझो, अ और व विन्दु से अक रेखा पर अन, वन लम्ब और अ विन्दु से अक के समानान्तर अट रेखा खींचो तो अक, अक के अत्यन्त पास होने के कारण अन = ताचा = अ स्थान से लम्ब की गति, \angle वअट = ताप, और वन = ताचा = व स्थान से लम्ब की गति, अव = ग, इस लिये

$$\text{वन} = \text{ताचा} = \text{वट} + \text{टन} = \text{ताचा} + \text{गताच}$$

अब, जब क वक्र की परिधि में घूमते घूमते फिर अपने पहले स्थान पर पहुँचे गा उस समय ताप, के जितने मान होंगे सब का योग धन ऋण के तुल्य होने से शून्य हो जायगा क्योंकि अक रेखा का एक ओर जितने झुकाव से चलना होगा फिर उतने ही झुकाव से विरुद्ध दिशा में चलना होगा । इस लिये वक्र के चारो ओर घूमने में यौ ताचा = यौ ताचा अर्थात् अ बिन्दु पर वक्र के केन्द्र को स्थिर रखने से जो लम्ब के गमन का प्रमाण होगा वही अक रेखा में कहीं केन्द्र रहने से होगा ।

अब कल्पना करो कि यन्त्र के केन्द्र अर्थात् प्रथम भुज के ग बिन्दुगत लम्बरूप अक्ष युग्म के अभिप्राय से क के भुज = य, कोटि = र हैं, और अग = अ, अक = क, \angle अगय = प, और कल्पना करो कि अक रेखा बढ़ाने से य अक्ष से प_२ कोण बनाती है तो सरलत्रिकोणमिति से

$$य = अकोज्याप + ककोज्याप_२, \quad र = अज्याप + कज्याप_२$$

$$\text{इस लिये} \quad \text{ताय} = -अज्यापताप - कज्याप_२ताप_२,$$

$$\text{तार} = अकोज्यापताप + ककोज्याप_२ताप_२$$

$$\text{और} \quad \text{यतार} = अ^०कोज्या^०पताप + अककोज्यापकोज्याप_२ताप_२$$

$$+ अककोज्यापकोज्याप_२ताप + क^०कोज्या^०प^०ताप_२$$

$$\text{रताय} = -अ^०ज्या^०पताप - अकज्यापज्याप_२ताप_२$$

$$- अकज्यापज्याप_२ताप - क^०ज्या^०प_२ताप_२$$

$$\text{इस लिये} \quad \text{यतार} - \text{रताय} = अ^०ताप + अककोज्या(प - प_२)ताप_२$$

$$+ अककोज्या(प - प_२)ताप + क^०ताप_२$$

$$= अ^०ताप + अककोज्या(प - प_२)ता(प + प_२) + क^०ताप_२$$

$$\text{और} \quad \text{ताचा} = अनं = अ^०ज्याअनं = अतापकोज्या(प - प_२)$$

$$\text{परन्तु} \quad \text{ष} + \text{ष}_२ = २प - (प - प_२)$$

$$\text{इस लिये} \quad \text{अककोज्या}(प - प_२)ता(प + प_२)$$

$$= २अककोज्या(प - प_२)ताप - अककोज्या(प - प_२)ता(ष - ष_२)$$

$$= २कताचा - अककोज्या(ष - ष_२)ता(प - प_२)$$

इस के उत्थापन से

$$\text{यतार} - \text{रताय} = अ^०ताप + क^०ताप_२$$

$$+ २कताचा - अककोज्या(ष - ष_२)ता(प - प_२)$$

परन्तु १३२वें प्रक्रम से क बिन्दु के भ्रमण से उत्पन्न निर्दिष्ट वक्र का फल
 $= \frac{1}{2} \int (यताय - रताय) यह होगा ।$

अब निर्दिष्ट वक्र के परिधि पर क बिन्दु के पूरा भ्रमण करने में कुछ आने पीछे घरूकते घरूकते अक, अग फिर अपने पहले स्थान पर पहुँचेंगे इस लिये ऊपर की युक्ति से $\int अताय, \int कताय,$

$\int अककोज्जा(प-प_१) ता(प-प_१)$ ये शून्य के तुल्य हो जायँगे इस लिये वक्र का पूरा फल $= \frac{1}{2} \int (यताय - रताय) = क \int ताया = कचा$

जहाँ चा लम्ब के गमन का प्रमाण है जो कि चक्र स्वयं दताया है। इस लिये चक्र में पहले ही से लम्ब के गमन के प्रमाण को क गुना कर अङ्कन कर डालें तो जो उस समय चक्र में अङ्कन की संख्या होगी वही वक्र का समग्र फल होगा।

अभ्यास के लिये प्रश्न

१। समातिपरवलय में जिसका $य^२ - र^२ = १$ यह समीकरण है

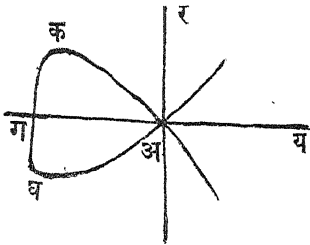
यदि केन्द्राभिप्राय से भुज, श्रुति, वक्र का चाप, इन से उत्पन्न वक्रत्रिभुज का फल = स हो तो सिद्ध करो कि

$$य = \frac{इ^स + इ^{-स}}{२} \text{ और } र = \frac{इ^स - इ^{-स}}{२}$$

२। जिस वक्र का $अ^२ र^३ = य^२ (२ अ - य)$ यह समीकरण है उसका सम्पूर्ण फल क्वा होगा। उ० $\pi अ^२$

३। जिस वक्र का $य^२ = र^३ (अ - य)$ यह समीकरण है उसके चाप और असीमपथ और य अक्ष से बने क्षेत्र का फल बताओ। उ० $\frac{३}{२} \pi अ^२$

४। जिस वक्र का $अ^३ र^३ = य^३ (क + य)$ यह समीकरण है उसकी आकृति नीचे लिखी हुई है इसमें अ क ग घ अ फन्दे का फल बताओ।



$$उ० \frac{८क^{३/२}}{३.५.७अ^{३/२}}$$



इस वक्र में अक = अ,

अग = क और इस का समीकरण $g^2 = (y-a)(y-k)^2$ यह है । ग क के बीच जो फन्दा है उस का फल बताओ ।

$$उ० \frac{८(क-अ)^{3/२}}{३.५ग^2}$$

६। $y^2 = ४अ^2 (२अ-y)$ यह एक विटचरी (Witch) का समीकरण है इसके और समीकरण के बीच क्षेत्र का फल बताओ ।

$$उ० ४^{\pi} अ^3$$

७। जिस दीर्घवृत्त का $\frac{y^2}{अ^2} + \frac{r^2}{क^2} = १$ यह समीकरण है उसके अवलूत

का सम्पूर्ण फल क्या होगा ।

$$उ० \frac{३\pi(अ-क)^2}{८अक}$$

८। सिद्ध करो कि जिसका अक्षीय समीकरण $श्रुप = अ$ यह है उसके कोई दो श्रुति और चाप से बने क्षेत्रों के फलों में वही सम्बन्ध होगा जो उस काल की दो श्रुतियों के अन्तर में होगा ।

९। $y^2 + r^2 = ३अ$ अ य र इस समीकरण के वक्र में जो एक फन्दा होगा उसका क्या फल होगा । यहाँ अक्षीय समीकरण बनाओ तो

$$श्रु = \frac{३अ कोज्याप ज्याप}{ज्या^2प + कोज्या^2प} \text{ ऐसा होगा फिर}$$

$$\text{फल} = \frac{९अ^2}{२} \int_0^{\pi/2} \frac{ज्या^2प कोज्या^2प}{(ज्या^2प + कोज्या^2प)^2} \text{ ताप}$$

इसके जानने के लिये मानो कि स्पप = च तो

$$\text{इस का रूप} \frac{९अ^2}{२} \int_0^{\infty} \frac{च^2 \text{ ता च}}{(१ + च^2)^2} = \frac{३अ^2}{२}$$

१०। सिद्ध करो कि जिस वक्र का $r^2 (y^2 + अ^2) = ग^2 (अ-y)$ यह समीकरण है उसका फल $y=0$ से $y=अ$ तक $ग^2 \left(\frac{\pi}{४} - \frac{१}{३} \text{ ला } २ \right)$ यह है ।

११। $r^2 = \frac{y^2(अ+y)}{अ-y}$ इस समीकरण के वक्र में जो फन्दा होगा उसका

फल क्या होगा ।

$$उ० २अ^2 \left(१ - \frac{\pi}{४} \right)$$

१२। $श्रु^2 कोज्याप = अ^2 ज्या^2 प$ इस समीकरण के वक्र में एक फन्दे का फल बताओ ।

$$उ० \frac{३अ^2}{४} - \frac{अ^2}{२} \text{ ला } २$$

१३। यदि वक्र में $\text{श्रु} = (\text{कोज्या } २\text{ प} + \text{ज्या } २\text{ प})$ तो सम्पूर्ण फल क्या होगा । उ० πa^2

१४। जिस वक्र का $(y^2 + r^2)^2 = ४ \frac{a^2}{k^2} y^2 r^2$ यह समीकरण है उसके एक

फन्दे का फल बतावो । उ० $\frac{\pi a^2}{2k}$

१५। जहाँ $(y^2 + r^2)^2 = ४a^2 y^2 + ४k^2 r^2$ ऐसा समीकरण है उस वक्र का सम्पूर्ण फल क्या होगा । उ० $2\pi(a^2 + k^2)$

१६। जिस वक्र का $\frac{y^2}{a^2} + \frac{r^2}{k^2} = \frac{1}{g^2} \left[\frac{y^2}{a^2} + \frac{r^2}{k^2} \right]^2$ यह समीकरण है

उस का फल सम्पूर्ण क्या होगा उ० $\frac{\pi g^2}{2ak}(a^2 + k^2)$

(१३०) प्रक्रम का ३ उदाहरण देखो)

१७। जहाँ $\text{श्रु} \text{ कोज्या } ४ = \text{अकोज्या } २\text{ प}$ उस वक्रके फन्दे का फल बतावो उ० $(2 - \frac{\pi}{2})a^2$

१८। यदि $a > k$ तो $\text{श्रु} = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 - k^2 \text{ कोज्या } ४)}} + k \text{ कोज्या } ४$ इस

समीकरण के वक्र का क्या फल होगा । उ० $\frac{\pi a^3}{\sqrt{(a^2 - k^2)}} + \frac{\pi k^2}{2}$

१९। दो श्रुति और कर्णच्छेद (Conchoid) के चाप से बने क्षेत्र के फल का मान बतावो । जहाँ कर्णच्छेद का $\text{श्रु} = \text{अ} + k \text{ कोज्या } ४$ यह समीकरण है ।

२०। दीर्घवृत्त के केन्द्र से दो श्रुति जो दीर्घवृत्त के परिधिस्थ दो बिन्दुओं तक खींची गई हैं उन से और दीर्घवृत्त के चाप से बने क्षेत्र का फल बतावो ।

२१। परवलय का चाप और शिरःस्थान से दो श्रुति इन से बने क्षेत्र का फल कैसा होगा ।

२२। यदि वक्र का समीकरण $\text{श्रु} = \text{अ}(\text{छेष} + \text{स्पष})$ और इस के असीम-पथ का समीकरण $\text{श्रु} \text{ कोज्या } ४ = २\text{ अ}$ यह हो तो वक्र और असीमपथ के भीतर का क्षेत्रफल क्या होगा ।

२४। सिद्ध करो कि $\text{श्रु} = \text{अ} (१ + २ \text{ कोज्या } ४)$ इस समीकरण के वक्र का सम्पूर्ण फल $a^2 \left[2\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2} \right]$ यह और इस के भीतरी फन्दे का फल

$a^2 \left[\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2} \right]$ यह होगा ।

२५। लाघुरिकृथिक सर्पिल में दो श्रुति और चाप से बने क्षेत्र का फल बतावो ।

२६। यदि वक्र की श्रुति श्रु, मूलविन्दु से किसी स्पर्शरेखा पर पड़े लम्ब का मान ल और इस लम्ब और निम्न रेखा से उत्पन्न कोण = ϕ , और सीमितवक्र का सम्पूर्ण फल स और इस के सीमित पाददल का सम्पूर्ण फल स_१ हो तो सिद्ध करो कि $2s_1 = s + \frac{2}{3} \int_{\phi}^{\pi} \theta$ ताप जहाँ वक्र और पाददल का एक ही मूलविन्दु है ।

२७। सिद्ध करो कि पाददल का मूल स्थान दीर्घवृत्त के भीतर ही दीर्घवृत्त के केन्द्र से ग दूरी पर है उसका सम्पूर्ण फल = $\int (a^2 + k^2 + g^2)$ यह होगा ।

२८। $\theta = a \cos \theta + k \sin \theta$ इस समीकरण के वक्र में एक फन्दे का फल बतावो ।
$$= \frac{\pi}{n} (a^2 + k^2)$$

२९। $\theta^2 = a^2 \cos \theta + k^2 \sin \theta$ इस समीकरण के वक्र में एक फन्दे का फल बतावो ।
$$= \frac{\sqrt{(a^2 + k^2)}}{n}$$

३०। $a^2 r^n = y^n (a^2 - y^2)$ इस समीकरण के वक्र का सम्पूर्ण फल क्या होगा ।
$$= \frac{2a^2}{5}$$

३१। $\theta = a \cos \theta$ इस समीकरण के वक्र में एक फन्दे का फल बतावो ।
$$= \frac{\pi a^2}{n}$$

३२। $\theta = a \sin \theta$ इस समीकरण के वक्र में सब फन्दों का फल बतावो ।

$$\text{उ फल} = \begin{cases} \frac{\pi a^2}{8} & \text{यदि } n \text{ विषम} \\ \frac{\pi a^2}{2} & \text{यदि } n \text{ सम} \end{cases}$$

३३। दीर्घवृत्त के एक नाभि से जितनी श्रुतियाँ हैं उन्हें अपनी सीध में बढ़ा

कर ग तुश्य काट उन पर एक वक्र रेखा कर दिया । इस से और दीर्घवृत्त की परिधि से उत्पन्न जो क्षेत्र हुआ उसका फल बतावो ।

उत्तर ग (२क + ग)

जहाँ क = दीर्घवृत्त का लघुव्यासार्द्ध ।

३४। श्रु^म = अ^म को ज्यामय इस समीकरण के वक्र में एक फन्दे का फल यदि आ और वक्र के मूलबिन्दु ही इस के पाददल की मूलबिन्दु जहाँ है वैसे पाददल का सम्पूर्ण फल आ_१ तो सिद्ध करो कि

$$आ_१ = आ (१ + \frac{३}{२})$$

३५। नाभि से जो परवलय में दो श्रुतियाँ हों उन से और परवलय के चाप से जो क्षेत्र बना उसका फल सिद्ध करो कि ।

$$\frac{अ^३}{३} \left\{ \left(\frac{श्रु + श्रु + ग}{२} \right)^{\frac{३}{२}} - \left(\frac{श्रु + श्रु - ग}{२} \right)^{\frac{३}{२}} \right\}$$

जहाँ परवलय की कोटि $r = \sqrt{\frac{४अय}{ग}}$ और परवलय के चाप की पूर्णज्या ग है ।

३६। दीर्घवृत्त के केन्द्र न से वृहद्व्यासार्द्ध से जो वृत्त बनाया गया उसको सहायक वृत्त कहो और न को नाभि । दीर्घवृत्त की परिधि में व बिन्दु लेकर इस के कोटि को अपनी सूध में बढ़ा कर मानो कि सहायक वृत्त की परिधि में प बिन्दु पर लगी, और दीर्घवृत्त के व्यासार्द्धग्र अ अक्ष में अ बिन्दु पर मानो तो यदि $\angle अ न प = ज$ तो सिद्ध करो कि अनाव दीर्घवृत्तखण्ड का फल $= \frac{अक}{२} (ज - इज्याज)$ यह होगा ।

जहाँ अ, क वृहद्व्यासार्द्ध हैं ।

३७। $४अ^२र^२ = क^२य^२(अ^२ - २अय)$ इस समीकरण के वक्र में फन्दे का फल बतावो ।

$$उ० \frac{अ.क}{१५}$$

३८। जिन दो वक्रों के $र^२ - ४अय = ०$, $य^२ - ४अर = ०$ ये समीकरण हैं उनके चापों से बने क्षेत्र का फल बतावो ।

$$उ० \frac{१६ अ^३}{३}$$

३९। जिस वक्र का $र = ग ज्या \frac{य}{अ} ला ज्या \frac{य}{अ}$ यह समीकरण है उसका फल० से लेकर अ^३ तक य के मान में क्या होगा ।

$$उ० २अग (१ - ला२)$$

४०। जिस दीर्घवृत्त का अर्ध + २कयर + गर^२ = १ यह समीकरण है उसका फल क्या होगा ।

$$उ० \quad \frac{\pi}{\sqrt{(अग-क^२)}}$$

(११६ प्रक्रम का अन्तिम वाक्य देखो)

४१। जिस दीर्घवृत्त का अर्ध + २कयर + गर^२ + २घय + २चर + फ = ० यह समीकरण है उसका क्षेत्रफल क्या होगा ।

$$उ० \quad \frac{\pi (अच^२ + गघ^२ + फक^२ - २ चजक - अगफ)}{(अग-क^२)^{३/२}}$$

४२। जिस वक्र का $४ र^२(अ^२ + य^२) - ८अर(अ^२ - य^२) + २(अ^२ - य^२)^२ = ०$ यह समीकरण है उसका सम्पूर्ण फल क्या होगा ।

$$उ० \quad अ^२\pi \left\{ ४ - \frac{५\sqrt{२}}{२} \right\}$$

४३। केन्द्र से दीर्घवृत्त की कोटियों पर वने अर्द्धवृत्त पर स्पर्शरेखा कर देने से स्पर्श बिन्दुओं पर जानेवाला जो वक्र हो उसका फल क्या होगा ।

दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{य^२}{अ^२} + \frac{र^२}{क^२} = १$ यह है

उ० वक्र का अक्षीय समीकरण दीर्घवृत्त के केन्द्र को

$$प्रवस्थान मान $थु^२ = \frac{अ^२क^२}{क^२ + ४अ^२स्प^२}$$$

$$\text{और फल} = \frac{\pi(अ^२ \times क)}{२(२अ + क)}$$

४४। जिस परवलय का $र^२ = ४अय$ यह समीकरण है उसके भीतर स्थिर (२ ग) पूर्णज्या घूमती है । उसके दोनों प्रान्तों पर परवलय में जो दो स्पर्शरेखा हैं उनके योगबिन्दु के गमन से जो वक्र होगा उसके और परवलय के भीतर समग्र फल क्या होगा ।

$$उ० \quad \frac{ग^२\pi}{२}$$

(परवलय के तिर्यक्भुजकोटि का समीकरण देखो)

४५। एक लड़के ने सात हाथ डंडे के दोनों शिरों को एक दीर्घवृत्त की परिधि पर रखकर चारों ओर घुमाने लगा । उस डंडे के बीच में नीचे एक लोहे की नोखदार कील लगी थी । इसके कारण डंडे के चारों ओर घूम जाने से दीर्घवृत्त के भीतर एक नया वक्र बन गया । लड़के ने हँसकर अपने गुरु से जो कि उसे हिसाब पढ़ाता था पूछा कि गुरुजी दीर्घवृत्त और नये वक्र के भीतर एक

अभ्यास के लिये प्रश्न ।

२२३

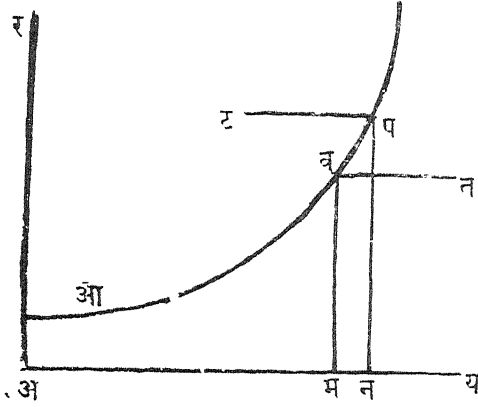
वर्गहस्त पत्थर की कितनी पट्टिया फर्श के लिये लगेंगी । बताओ गुरु ने क्या उत्तर दिया । यहाँ बृहद्व्यास १४ हाथ का समझो ।

यदि व्यास परिधि का सम्बन्ध $\frac{३३}{४}$ मानो तो पत्थर के पट्टियों की संख्या $३८\frac{३}{४}$

इति सप्तमाध्याय ।

वक्र के पृष्ठफल और घनफल का आनयन ।

१४१। कल्पना करो कि अग, अय लम्बरूप अक्ष, आ स्थिरविन्दु



चा=आव, व विन्दु का भु =य, को=र है। व के पास प एक और विन्दु लो और आवप वक्र को अ य अक्ष के चागे ओर घुमा दो तो एक घनक्षेत्र बन जायगा जिसके आव चाप के घूमने से जो पृष्ठफल होगा उसके गति का

सम्बन्ध चाप के गति के वश से $\frac{\text{ता पृ}}{\text{ताचा}} = २\pi r$ (चलनकलन का १६० वाँ प्रक्रम देखो)

$$\text{इस लिये } \text{पृ} = \int २\pi r \text{ ता चा} \dots \dots \dots (१)$$

$$\text{इसी तरह से } \text{पृ} = \int २\pi r \frac{\text{ताना}}{\text{ताय}} \text{ ताय} \dots \dots \dots (२)$$

$$\text{पृ} = \int २\pi r \frac{\text{ताच}}{\text{तार}} \text{ तार} \dots \dots \dots (३)$$

$$\text{पृ} = \int २\pi r \text{ ता चा} = \int २\pi r \frac{\text{ताचा}}{\text{ताप}} \text{ ताप} = \int २\pi \text{श्रुज्या प} \frac{\text{ताचा}}{\text{ताप}} \text{ ताप} (४)$$

$$\text{जहाँ } \frac{\text{ताचा}}{\text{ताप}} = \sqrt{\left\{ \text{श्रु}^२ + \left[\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}} \right]^२ \right\}}$$

किसी स्थान में पृष्ठफल के लिये इन चारो समीकरणों में से गणितलाघव समझ कर एक को चुन सकते हो। जहाँ सहज में र, चाप के फल रूप में आ सके वहाँ (१) पहले को जहाँ $\frac{\text{ताचा}}{\text{तार}}$ सहज में र के फलरूप में आ सके वहाँ (३) को और जहाँ अक्षीयसमीकरण मालूम हों वहाँ (४) को ले सकते हो। प्रायः (२) बहुत ही कामका है क्योंकि वक्र के समीकरण से र और

$\frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}}$ दोनों प्रायः सहज में y के फलरूप में आजाते हैं इस लिये इसी को बहुधा लोग लेते हैं ।

प्रत्येक समीकरणों से उचित सीमा के भीतर चाप से बने पृष्ठ का फल मालूम हो जायगा ।

१४२। अ y अक्ष से अ दूरी पर अ y के समानान्तर अ y के चारो ओर यदि एक अपरिमित रेखा घूमे तो स्पष्ट है कि समतलमस्तरूप एक शङ्कु बन जायगा इस लिये y_2, y_1 भुज के भीतर इस शङ्कु का पृष्ठ-फल (२) समीकरण लेने से $(r = अ, \frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} = \sqrt{1 + \left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right)^2} = १)$

$$\int_{y_1}^{y_2} 2\pi अ ताय = 2\pi अ (y_2 - y_1) \text{ यह होगा ।}$$

इस से यह सिद्ध होता है कि इस शङ्कु के आधार परिधि को ऊँचाई के अन्तर से गुण देने से दोनों उचाइयों के भीतर का पृष्ठफल हो जायगा ।

१४३। अ विन्दु पर अ y अक्ष से अ तुल्य कोण बनाने वाली रेखा यदि अ y के चारो ओर घूमे तो स्पष्ट है कि समसूची का पृष्ठ उत्पन्न हो जायगा जहाँ किसी विन्दु का भु = y और को = $r = y$ स्प अ

$$\text{इस लिये } \frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} = \sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right)^2 \right\}} = \sqrt{(1 + \text{स्प}^2 अ)} = \text{छे अ ।}$$

इस लिये १४१ प्रक्रम का (२) समीकरण लेने से

$$पृ = 2\pi \int \text{स्प अ छे अ य ताय} = \pi \text{ स्प अ छे अ य}^2 + \text{स्थि}$$

और y_2, y_1 के भीतर पृष्ठफल = $\pi \text{ स्प अ छे अ (य}_2^2 - \text{य}_1^2)$ यही पृष्ठफल उस घनक्षेत्र का भी होगा जिसे भास्कराचार्य ने अपनी लीलावती में वापी क्षेत्र कहा है ।

इस में यदि $y_1 = 0$ और मूलस्थान से y_2 दूरी पर अ y अक्ष पर लम्बरूप धरातल से सूचीपृष्ठसूत्रों को काटें तो कटे हुए परिधि का व्यासार्द्ध = त्रि = y_2 स्पअ इसलिये समसूच्याकारशङ्कु का पृष्ठफल = $\pi \text{कोछेअत्रि}^2$ इसी में यदि परिधि = $प = 2\pi$ त्रि और सूची का पृष्ठसूत्र = $पृ सू = \text{को छे अ त्रि}$ तो पृष्ठफल = $\frac{प \times पृ सू}{२}$ । इस का साधन हमने अपने चलनकलनके १५९वें प्रक्रम में केवल क्षेत्रयुक्ति ही से किया है ।

१४४। गोल के पृष्ठफल का आनयन ।

कल्पना करो कि वृत्त का समीकरण $x^2 = a^2 - y^2$ यह है और यह वृत्त y अक्ष के चारों ओर घूमकर एक गोल को बनाया है तो $\frac{ताय}{ताय} = -\frac{य}{र}$

$$\text{और } \frac{ताय}{ताय} = \sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{ताय}{ताय} \right)^2 \right\}} = \sqrt{\left(1 + \left[\frac{य^2}{र^2} \right] \right)} = \frac{अ}{र}$$

इस लिये १४१ प्रक्रम का (२) समीकरण लेने से

$$पृ = २\pi \int र \frac{अ}{र} ताय = २\pi अ \int ताय = २\pi अ य + स्थि$$

कल्पना करो कि मूलबिन्दु से y_1, y_2 दूरी पर y अक्ष पर लम्बरूप जो दो धरातल हैं उनसे गोल को काटा तो कटे हुए खण्ड का पृष्ठफल $= २\pi अ (y_2 - y_1) = प (y_2 - y_1)$, (यदि $प =$ गोल की परिधि ।) इस पर से सिद्ध होता है कि कटे खण्ड का पृष्ठफल $y_2 - y_1$ इसके अर्थात् उसके उँचाई के बराबर घटता बढ़ता है अर्थात् खण्डों की उँचाइयों में जो सम्बन्ध है वही उनके पृष्ठफल में सम्बन्ध होता है ।

यहाँ यदि $y = अ$ और $y_2 = -अ$ तो गोल का समग्र पृष्ठफल $= ४\pi अ^2 = ४ \times$ वृत्तफल ।

अर्थात् वृत्त के फल को चार गुना कर देने से वृत्त से बने गोल का पृष्ठफल होता है । भास्कराचार्य में सब से पहले इस गोल के पृष्ठफल को भास्कराचार्य ने निकाला है और यद्यपि उनसे इसकी सच्ची उपपत्ति न हुई तथापि गोल का बहुत सा खण्ड कर और प्रत्येक खण्डों का फल साधन कर उनके योग पर से अटकर से सच्चा ही पृष्ठफल निकाला और लल्ल ने जो अशुद्ध पृष्ठफल का साधन किया था उसका खण्डन किया ।

भास्कराचार्य ने अपने गोलाध्याय में यह भी दिखलाया है कि गोल के परिधि के आधे को व्यास मान एक कपड़े का वृत्त बनाया जाय और इससे यदि गोल को ढाँके तो गोल का आधे से अधिक खण्ड ढँक जाता है इस लिये कपड़े के वृत्त का जो फल उसके दूने से गोल का पृष्ठफल अल्प ही होगा और गणित से निश्चय है कि गोल के वृत्त के फल से कपड़े के वृत्त का दूना फल पाँच गुना के आसन्न है इस लिये वृत्त के फल को पाँच गुना करने से गुणनफल गोल के पृष्ठफल से अधिक होगा इस लिये लल्लने जो अपने गणित में लिखा है कि

(वृत्तफलं परिधिघ्नं समन्ततो भवति गोलपृष्ठफलम्) वृत्तफल को परिधि से गुण देने से पृष्ठफल होता है यह बहुत ही अशुद्ध है ।

१४५। वृहद्व्यास के चारो ओर दीर्घवृत्त के घूमने से जो घनक्षेत्र हो उसको दीर्घगोल कहो तो इस के पृष्ठफल के आनयन के लिये कल्पना करो कि दीर्घवृत्त का समीकरण $a^2 r^2 + k^2 y^2 = a^2 k^2$ यह है

$$\begin{aligned} \text{तो यहाँ } \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} &= -\frac{k^2 y}{a^2 r} \text{ और } \frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} = \sqrt{\left[1 + \frac{k^4 y^2}{a^4 r^2}\right]} \\ &= \frac{k(\sqrt{a^2 - k^2 y^2})}{ar} \end{aligned}$$

इस लिये १४१ प्रक्रम के (२) समीकरण से

$$\begin{aligned} \text{पृ} &= \frac{2\pi k}{a} \int \sqrt{a^2 - k^2 y^2} \text{ ताय} = \frac{2\pi k^2}{a} \int \sqrt{\left(\frac{a^2}{k^2} - y^2\right)} \text{ ताय} \dots (१) \\ &= \frac{\pi k^2}{a} \left\{ y \sqrt{\left[\frac{a^2}{k^2} - y^2\right]} + \frac{a^2}{k^2} \text{ज्या}^{-1} \frac{इय}{a} \right\} \end{aligned}$$

यदि ०, अ के भीतर य के मान में पृष्ठफल का साधन करें तो दीर्घगोल

$$\text{का आधा पृष्ठफल} = \pi \text{ अक} \left\{ \sqrt{1 - इ^2} + \frac{\text{ज्या}^{-1} इ}{इ} \right\}$$

(दीर्घवृत्तलक्षण देखो)

यदि y_2, y_1 के भीतर चलानयन करें तो (१) से

$$\text{पृ} = \frac{2\pi k^2}{a} \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{\left(\frac{a^2}{k^2} - y^2\right)} \text{ ताय}$$

यह दिखलाता है कि जिस दीर्घवृत्त का $\frac{अ}{इ}$ वृहद्व्यासार्द्ध और क लघुव्यासार्द्ध

है उसका y_2, y_1 सम्बन्धि द्विगुण कोटियों के भीतर जो खण्ड है उसे π से गुण देने से y_2, y_1 भुज सम्बन्धि अपने दीर्घवृत्त का पृष्ठफल हो जायगा ।

इसी तरह यदि दीर्घवृत्त लघुव्यास के चारो ओर घूम कर घनक्षेत्र बनावे तो उसका पृष्ठफल भुज और कोटि को बदल देने से

$$\begin{aligned} \text{पृ} &= 2\pi \int y \text{ ताचा} = 2\pi \int \left[a^2 + \frac{a^4 y^2}{k^2 r^2} \right]^{\frac{1}{2}} \text{ तार} \\ &= 2\pi \frac{a^2 इ}{k^2} \int \left[r^2 + \frac{k^4}{a^2 इ^2} \right] \text{ तार} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\pi \frac{a^2 z}{k^2} \left\{ \frac{r}{z} \sqrt{(r^2 + \frac{k^2}{a^2 z^2})} + \frac{k^2}{a^2 z} \text{ला} \left\{ r + \sqrt{\left[r^2 + \frac{k^2}{a^2 z^2} \right]} \right\} \right\} \\
 &= \pi \frac{ar}{k^2} (a^2 z^2 r^2 + k^2)^{\frac{3}{2}} + \pi \frac{k^2}{z} \text{ला} \frac{azr + \sqrt{(a^2 z^2 r^2 + k^2)}}{az}
 \end{aligned}$$

०, क के बीच में चलानयन करने से और उसको दूना कर देने से समग्र पृष्ठफल = $2\pi a^2 + \pi \frac{k^2}{z} \text{ला} \frac{1+z}{1-z}$

यदि $\frac{y^2}{a^2} - \frac{a^2 z^2 r^2}{k^2} = 1$ इस अतिपरवलय का y_1, y_2 के भीतर फल साधन करो तो स्पष्ट होगा कि इस फल से π गुना ऊपर के घनक्षेत्र का y_1, y_2 भुजसम्बन्धी पृष्ठफल होगा ।

१४६। परवलय का चाप y अक्ष के चारो ओर घूम कर जो घनक्षेत्र बनाता है उसके पृष्ठफल का आनयन ।

कल्पना करो कि परवलय का समीकरण $r^2 = 4az$ यह है तो

$$\begin{aligned}
 \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} &= \frac{2a}{r} \cdot \frac{\text{ताचा}}{\text{तार}} = \sqrt{1 + \frac{r^2}{4a^2}} \\
 &= \frac{\sqrt{(4a^2 + r^2)}}{2a} \quad \text{इस लिये १४१ प्रक्रम के (३) समीकरण से} \\
 \text{पृ} &= \int 2\pi r \frac{\text{ताचा}}{\text{तार}} \text{तार} = \frac{\pi}{a} \int r \sqrt{(4a^2 + r^2)} \text{तार} \\
 &= \frac{\pi}{2a} \int \sqrt{(4a^2 + r^2)} 2r \text{तार} = \frac{\pi}{2a} \times \frac{2}{3} (4a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}} \\
 &= \frac{\pi}{3a} (4a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}} + \text{स्थि}
 \end{aligned}$$

$$\text{०, और } r_1 \text{ के भीतर पृष्ठफल} = \frac{\pi}{3a} \left\{ (4a^2 + r_1^2)^{\frac{3}{2}} - 4a^3 \right\}$$

१४७। कातन्वली (Catenary) का पृष्ठफलानयन ।

इस का $r = \frac{\pi}{z} \left(e^{\frac{y}{\pi}} + e^{-\frac{y}{\pi}} \right)$ यह समीकरण है

और जहाँ $y = 0$ वहाँ से गणना करने से चा = $\frac{\pi}{z} \left(e^{\frac{y}{\pi}} - e^{-\frac{y}{\pi}} \right)$

(७३वाँ प्रक्रम देखो) इस लिये यदि y अक्ष के चारो ओर वक्र के घूमने से घनक्षेत्र बना हो तो उसका पृष्ठफल १४१ प्रक्रम के (२) समीकरण से

$\int 2\pi r \frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}}$ ताय यह होगा परन्तु यहाँ वक्र के लक्षण से

$$r^2 = \frac{g^2}{\rho} \left(\frac{2y}{g} + \frac{-2y}{g} + 2 \right) = \frac{g^2}{\rho} \left(\frac{2y}{g} - 2 + \frac{-2y}{g} + 2 \right) = \text{चा}^2 + g^2$$

इस लिये r तार = चा · ताचा । $\frac{r}{\text{चा}} = \frac{\text{ताचा}}{\text{ता}}$ और $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{1}{g} \left(\frac{y}{g} - 1 - \frac{y}{g} \right)$

$$= \frac{\text{चा}}{g} \quad \text{इस लिये} \quad \frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} = \frac{r}{g} \quad ।$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{पृ} &= 2\pi \int r \frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} \text{ताय} = 2\pi \int \frac{r^2 \text{ताय}}{g} = \frac{2\pi}{g} \int \frac{g^2}{\rho} \left(\frac{2y}{g} + \frac{2y}{g} + 2 \right) \text{ताय} \\ &= \frac{\pi g}{2} \int \left(\frac{2y}{g} + \frac{2y}{g} + 2 \right) \text{ताय} = \frac{g^2 \pi}{\rho} \left(\frac{2y}{g} - 1 - \frac{2y}{g} \right) + g^2 \pi y \\ &= \pi (r \text{चा} + g y) \end{aligned}$$

इस से यह सिद्ध होता है कि चाप और कोटि के घात में g गुणित भुज जोड़ कर उसको व्यास मानो तो इस व्यास पर से जो परिधि हो वही कातन्वली घनक्षेत्र का पृष्ठफल होगा ।

इसी स्थान में यदि r अक्ष के चारो ओर घूमने से घनक्षेत्र बना हो तो पृष्ठफल =

$$2\pi \int y \text{ताचा} = 2\pi \int \frac{y r \text{ताय}}{g} = \pi \int y \left(\frac{y}{g} + \frac{-y}{g} \right) \text{ताय}$$

$$\text{परन्तु} \int y \frac{y}{g} \text{ताय} = g y \frac{y}{g} - g \int \frac{y}{g} \text{ताय} = g y \frac{y}{g} - g^2 \frac{y}{g}$$

$$\text{और} \int y \frac{-y}{g} \text{ताय} = -g y \frac{-y}{g} + g \int \frac{-y}{g} \text{ताय} = -g y \frac{-y}{g}$$

$-g^2 \frac{-y}{g}$ खण्डचलानयन से ।

इस लिये

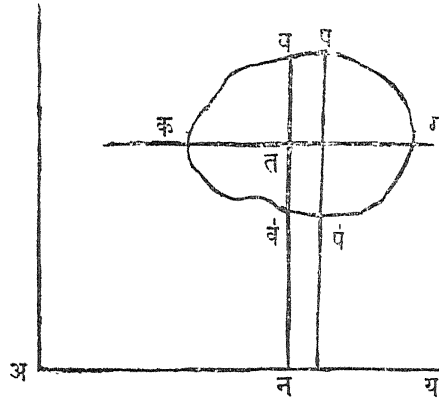
$$\therefore y \text{ के वीज में } \text{पृ} = \pi \int y \frac{y}{g} \text{ताय} + \pi \int y \frac{-y}{g} \text{ताय}$$

$$= \pi \left(g y \frac{y}{g} - g^2 \frac{y}{g} + g^2 - g y \frac{-y}{g} - g^2 \frac{-y}{g} + g^2 \right)$$

$$= 2\pi \left\{ g^2 + y \left[\frac{y}{r} \left(\frac{y}{g} - \frac{y}{g} \right) - \frac{y}{g} \right] - g \left[\frac{y}{r} \left(\frac{y}{g} + \frac{y}{g} \right) \right] \right\}$$

$$= 2\pi (g^2 + y\text{चा} - g\text{र}) ।$$

१४८। कल्पना करो कि कवचपग पर्व क एक ऐसा सीमितवक्र है जिस का



कग रेखा के दोनों ओर तुल्य अवयव है। कग रेखा अय अक्ष के समानान्तर और अय अक्ष क्षेत्र के बाहर है।

अय अक्षके चारो ओर इस क्षेत्र के घूमने से जो घनक्षेत्र होगा उस का पृष्ठफल १४१ प्रक्रम से यदि व, प और

अ वप को बहुत ही पास पास समझो और अय अक्ष पर व न लम्ब को र, वन लम्ब को र' और क ग के दोनो ओर सब तरह से क्षेत्र के समान भाग होने से वप चाप = व'प' चाप तो $2\pi \int (r + r') \text{ताचा} = 4\pi \text{क ताचा}$ यहाँ क = तन इस लिये यदि समग्र वक्र की लम्बाई अर्थात् परिधि कवचपगपर्व क का मान संचा हो तो समग्र पृष्ठफल = $2\pi \text{क} \times \text{संचा}$ ।

इस से यह सिद्ध होता है कि ऐसे क्षेत्रों का पृष्ठफल उन के परिधि और य अक्ष से समानान्तर रेखा का अन्तर जो हो उस को व्यासार्द्ध मानने से जो वृत्त की परिधि हो इन के घात के तुल्य होता है।

जैसे यदि वृत्त का समीकरण $(y - \text{च})^2 + (r - \text{ज})^2 - g^2 = 0$ ऐसा हो तो स्पष्ट है कि य अक्ष के समानान्तर केन्द्रगामिनी रेखा जो होगी उस का य अक्ष से अन्तर ज होगा इस लिये य अक्ष के चारो ओर वृत्त के घूमने से गोलमुद्रिका होगी उस का पृष्ठफल = गोलपरिधि \times ज व्यासार्द्ध की परिधि = $2\pi g \times 2\pi j$

यहाँ यदि १४१वें प्रक्रम से समानान्तर रेखा के ऊपरी भाग का पृष्ठफल साधन करो तो $\text{पृ} = 2\pi \int [j + \sqrt{g^2 - (y - \text{च})^2}] \text{ताचा}$

$$= 2\pi \int j \text{ताजा} + 2\pi \int \sqrt{g^2 - (y - \text{च})^2} \text{ताचा}$$

$$= 2^{\pi}जचा + 2^{\pi} \int \sqrt{\{ग^2 - (य-च)^2\}} ताचा = 2^{\pi}जचा + 2^{\pi}गय$$

लघुरूप करने से।

इसी प्रकार रेखा के नीचे के भाग का पृष्ठफल = $2^{\pi}जचा - 2^{\pi}गय$ ऐसा होगा।

इस लिये समग्र घनफल = $2^{\pi}ज \times 2चा = 2^{\pi}गज \times गो \cdot प$ ।

१४९। जिस वक्र का अक्षीय समीकरण $\theta = अ(१ + कोज्याप)$ यह है, स्थिर रेखा के चारों ओर उस के घूमने से जो घनक्षेत्र होगा उस के पृष्ठफल का ज्ञान करना हो तो १४९वें प्रक्रम के (४) समीकरण से

$$पृ = 2^{\pi} \int \theta ज्याष \frac{ताचा}{ताप} ताष ।$$

$$\text{परन्तु } \frac{ताचा}{ताष} = \sqrt{\{ \theta^2 + \left[\frac{ता\theta}{ताष} \right]^2 \}} = अ \sqrt{\{(१ + कोज्याप)^2 + ज्या^2प\}}$$

$$= अ \sqrt{(२ + २कोज्याप)} = २अ कोज्या^{\frac{प}{२}}$$

इस लिये $पृ = ४^{\pi}अ^2 \int (१ + कोज्याप) कोज्या^{\frac{प}{२}} ज्याष ताष$

$$= १६^{\pi}अ^2 \int कोज्या^{\frac{प}{२}} ज्या^{\frac{प}{२}} ताष = - \frac{३२^{\pi}अ^2}{५} कोज्या^{\frac{प}{२}} + स्थि ।$$

$$०, \pi \text{ के भीतर } \theta \text{ के मान में समग्र घनक्षेत्र का पृष्ठफल} = \frac{३२^{\pi}अ^2}{५}$$

१५०। कल्पना करो कि परस्पर लम्बरूप तीन धरातलों के योग रेखाओं के वश से किसी घनक्षेत्र के पृष्ठ का $f(य, र, ल) = ०$ यह समीकरण है (९८वाँ प्रक्रम देखो) तो इस पर से स्पष्ट है कि

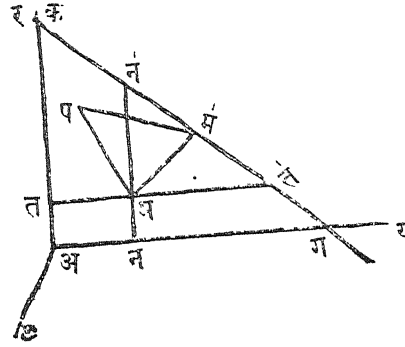
$ल = फा(य, र)$ ऐसा होगा। जिस पृष्ठविन्दु का $भु = य$, $को = र$, $शं = ल$ है उस विन्दु पर घनक्षेत्र में स्पर्शधरातल करने की इच्छा है।

स्पर्शधरातल उसे कहते हैं जिस के और वक्र के पृष्ठ के बीच दूसरा धरातल न बन सके। इस धरातल के जानने के लिये पहले साधारण किसी धरातल का समीकरण बनाते हैं।

कल्पना करो कि किसी इष्टधरातल में $प$ कोई विन्दु है जिस के शङ्कु $ल$ का मूल $य$ र धरातल में $म$ और $य$ र धरातल और इष्ट धरातल की योगरेखा कग है।

म बिन्दुसे अय और अर अक्ष पर क्रम से मन, मत लम्ब डाल कर बड़ा दो और मान लो कि कग रेखा में इन दोनों लम्बों का योग न, और त बिन्दु में हें ।

प बिन्दु से कग रेखा पर लम्ब पम है ।



अब यहाँ घनक्षेत्रमिति से शं = ल = पम, भु = य = अन और कोटि = र = मन । \angle ममप = यर धरातल और इष्टधरातल से उत्पन्न कोण = इ, \angle क = क, \angle ग = ग ।

नग = अग - अन = अग - य . \therefore नन = नग कोस्प न = (अग - य) कोस्पक और नम = नन - मन = (अग - य) कोस्पक - र . \therefore मम = नम ज्यान = (अग - य) कोज्याक - रज्याक परन्तु मम = पम कोस्प \angle पमम = लकोस्पइ । इस लिये

$$(\text{अग - य}) \text{कोज्याक - रज्याक} = \text{अगज्याग} - \text{यज्याग} - \text{रज्याक} = \text{लकोस्पइ}$$

$$\text{वा य ज्याग} + \text{रज्याक} + \text{लकोस्पइ} - \text{अगज्याग} = 0, \dots \dots \dots (१)$$

इस में ज्याग, ज्याक, कोस्पइ, और -अगज्याग इन स्थिराङ्कों को इन के महत्तमापवर्त्तन से भाग दे कर इन के स्थान में क्रम से आ, का, खा, गा का उत्थापन देवो तो धरातल का समीकरण

$$\text{आय} + \text{कार} + \text{खाल} + \text{गा} = 0 \dots \dots \dots (२) \text{ यह हुआ}$$

कल्पना करो कि पृष्ठ के उस बिन्दु पर गये धरातल का समीकरण

आय + कार + खाल + गा = ० यह है तो इस के दूसरे बिन्दु के भु = य, को = र, शं = ल से आय + कार + खाल + गा = ० ऐसा समीकरण होगा । इस लिये दोनों के अन्तर से आ(य - य) + का(र - र) + खा(ल - ल) = ०

इसलिये ल—ल = आ Δ य + का Δ र जहाँ— $\frac{आ}{खा} = आ - \frac{का}{खा} = -का$
 परन्तु य + Δ य, र + Δ र भुजकोटि के वश से घनवक्र के पृष्ठ का शङ्कु
 = ल + $\frac{ताल}{ताय} \Delta$ य + $\frac{ताल}{तार} \Delta$ र

$$+ \frac{1}{3} \left\{ \frac{ताल}{ताय^3} (\Delta य)^3 + 2 \frac{ताल}{ताय तार} \Delta य \Delta र + \frac{ताल}{तार^3} (\Delta र)^3 \right\} + \dots$$

(चलनकलन का ६८वाँ प्रक्रम देखो) इस लिये घनक्षेत्र के पृष्ठ के शङ्कु में धरातल के शङ्कु को घटा देने से

$$\text{अन्तर} = अं = \left(\frac{ताल}{ताय} - आ \right) \Delta य + \left(\frac{ताल}{तार} - का \right) \Delta र$$

$$+ \frac{1}{3} \left\{ \frac{ताल}{ताय^3} (\Delta य)^3 + 2 \frac{ताल}{ताय तार} \Delta य \Delta र + \frac{ताल}{तार^3} (\Delta र)^3 \right\} + \dots$$

य र धरातल में जिन बिन्दुओं का य, र और य + Δ य, र + Δ र भुजकोटि हैं उन पर गई रेखा य अक्ष से यदि व कोण बनावे तो Δ र = यस्पव अन्तर में इन का उत्थापन देने से

$$अं = \left\{ \left[\frac{ताल}{ताय} - आ \right] + \left[\frac{ताल}{तार} - का \right] स्पव \right\} \Delta य + \left[\frac{ताल}{ताय^3} + 2 \frac{ताल}{ताय तार} स्प व + \frac{ताल}{तार^3} स्प^2 व \right] \frac{(\Delta य)^3}{3} + \dots$$

इस लिये

$$\frac{अं}{\Delta य} = \left[\frac{ताल}{ताय} - आ \right] + \left[\frac{ताल}{तार} - का \right] स्प व + \left\{ \frac{ताल}{ताय^3} + 2 \frac{ताल}{ताय तार} स्प व + \frac{ताल}{तार^3} स्प^2 व \right\} \frac{\Delta य}{3}$$

यह समीकरण दिखलाता है कि Δ य अत्यल्प लेने से $\frac{अं}{\Delta य}$ यह

$\left(\frac{ताल}{ताय} - आ \right) + \left(\frac{ताल}{तार} - का \right) स्प व$ इस के तुल्य हो सकता है इस में यदि

$\Delta य, \Delta$ र ऐसे हों कि स्प व = $-\frac{\frac{ताल}{ताय} - आ}{\frac{ताल}{तार} - का}$ तो स्पष्ट है कि एक दिशा में

परमाल्प अन्तर शून्य के लगभग होगा ।

परन्तु यदि $\frac{ताल}{ताय} = आ$ और $\frac{ताल}{तार} = का$ तो सब दिशाओं में परमाल्प अन्तर शून्य के लग भग होगा और Δ य के स्थान में ताय रखने से ठीक ही ठीक शून्य के तुल्य होगा ऐसी दशा में वह धरातल स्पर्शधरातल होगा

और उस का समीकरण $\frac{क}{ग}$ के स्थान में $\frac{ताल}{ताय}$, $\frac{ताल}{तार}$ का उत्थापन देने से

$$\frac{क}{ग} - \frac{क}{ग} = \frac{ताल}{ताय} (\frac{क}{ग} - \frac{क}{ग}) + \frac{ताल}{तार} (\frac{क}{ग} - \frac{क}{ग}) \text{ यह होगा } \dots \dots \dots (३)$$

(३) समीकरण का रूपान्तरण करने से

$क = अग स्प इ ज्या ग - य स्प इ ज्या ग - र स्प इ ज्या क$

और $\frac{क}{ग} = अ ग स्प इ ज्या ग - य स्प इ ज्या ग - र स्प इ ज्या क$

इस लिये $\frac{क}{ग} - \frac{क}{ग} = -स्प इ ज्या ग (\frac{क}{ग} - \frac{क}{ग}) - स्प इ ज्या क (\frac{क}{ग} - \frac{क}{ग}) \dots (४)$

(३) और (४) का तुलना करने से

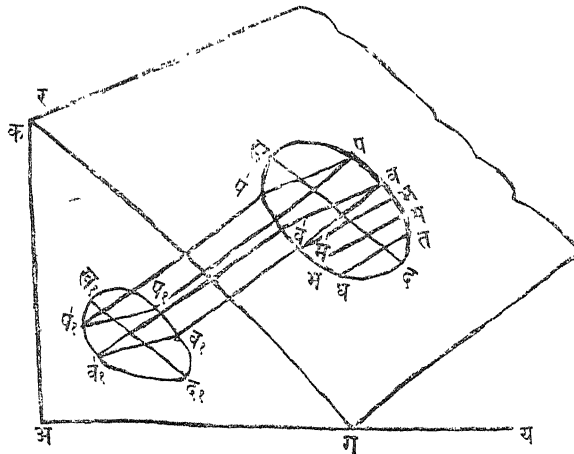
$$\frac{ताल}{ताय} = -स्पइज्याग, \frac{ताल}{तार} = -स्पइज्याक = -स्पइकोज्याग$$

इस लिये $(\frac{ताल}{ताय})^2 + (\frac{ताल}{तार})^2 = स्प^2 इ$

इस लिये $छे इ = \sqrt{१ + (\frac{ताल}{ताय})^2 + (\frac{ताल}{तार})^2} \dots \dots \dots (५)$

मैं यहाँ पर घनक्षेत्रमिति के सिद्धान्तों का वर्णन नहीं करता हूँ किन्तु घन-क्षेत्रमिति के बल से कुछ चलराशि के सिद्धान्त को दिखलाया चाहता हूँ । हिन्दी भाषा में घनक्षेत्रमिति के न होने से उपयोगी सिद्धान्तों का कुछ वर्णन कर दिया है । डिमार्गन (Demorgan) साहब ने चलनकलन और चलराशिकलन के १५ वें अध्याय में इस विषय पर बहुत बढ़ाकर लिखा है । चलराशिकलन में घन-क्षेत्रमिति के सिद्धान्तों का लिखना मैं अनावश्यक समझता हूँ ।

१५१। कल्पना करो कि यर धरातल से जो इष्टधरातल इ तुल्य कोण बनाता है उसमें ख प व भ म त द ध ख एक कोई क्षेत्र है इसके सीमा के प्रति-



चिन्दु से यर धरातल पर लम्ब डाल लम्बमूलों में रेखा कर देने से यर धरातल में एक नया क्षेत्र ख,प,व,द,व,प,ख, उत्पन्न हुआ इस का फल जानना हो तो पहले क्षेत्र में कोई ख चिन्दु लेकर धरातलों के योगरेखा क ग के समानान्तर खद रेखा खींचो ।

इस का छोटा छोटा च के समान बहुतसा विभाग कर प्रति भागों पर पर्प,

वव, भभ, इत्यादि लम्ब खड़ा कर दो इस तरह से इस क्षेत्र का समानलम्ब-चतुर्भुज रूप बहुत खण्ड हो गये जिन में किसी एक पप व व चतुर्भुज का फल = च $\left[\frac{पप + वव}{२} \right]$ और इस चतुर्भुज के वश से यर धरातल में नये क्षेत्र में भी लम्बमूल के वश से एक समान लम्ब प_१प_१व_१व_१ चतुर्भुज उत्पन्न होगा जिस में प_१प_१ = कोज्याइ × पप, व_१व_१ = कोज्याइ × वव और इस में लम्ब मान वही च के तुल्य होगा इस लिये इस का फल = च $\left[\frac{प.प_१ + व_१.व_१}{२} \right]$ = च $\left[\frac{पप + वव}{२} \right]$ कोज्याइ = पहले चतुर्भुज का फल × कोज्याइ ॥ इसी तरह सब पहले चतुर्भुजों के फल को कोज्याइ से गुण देने से नये क्षेत्र के चतुर्भुजों का सब फल होगा इस लिये सब चतुर्भुजों का योग नये क्षेत्र का फल = पहले क्षेत्र के चतुर्भुजों का योग × कोज्याइ = पहले क्षेत्र का फल × कोज्याइ ।

इस से यह सिद्ध होता है कि जिस धरातल में जो कोई क्षेत्र हो उसके प्रान्त से दूसरे धरातल में लम्ब डाल इस क्षेत्र को दूसरे धरातल में परिणामन करें तो परिणत क्षेत्र का फल पहले क्षेत्र के फल को धरातलों के झुकाव की कोटिज्या से गुण देने से होगा ।

१५२। कल्पना करो कि किसी घनक्षेत्र के पृष्ठ का फ (य, र, ल) = ० यह समीकरण है । पृष्ठ के प विन्दु का भु = य, को = र, —श = ल और प विन्दु के बहुत ही पास जो व विन्दु है उस का भु = य + Δय, को = र + Δर, शं = ल + Δल । प, विन्दु पर एक स्पर्शधरातल बना लो और प और व विन्दुओं में लगा कर य ल, र ल, धरातलों के समानान्तर धरातलों को बनाओ तो समानान्तर धरातलों से जो स्पर्शधरातल में अवयव उत्पन्न हुआ उसके प्रान्त से य र धरातल पर यदि लम्ब डालें तो उस का परिणत रूप एक आयत होगा जिसका भुज = Δय, को = Δर इस लिये

स्पर्शधरातल के अवयव का फल = $\frac{\Delta य \times \Delta र}{कोज्याइ}$ । १५१ प्रक्रम से इस में

स्पष्ट है कि Δ य के स्थान में यदि ताय को रख दें तो स्पर्शधरातल का अवयव घनक्षेत्र के पृष्ठ का अवयव हो जायगा । परन्तु जब

य = ताय तो र = तार इस लिये रल धरातल के समानान्तर दोनों

$$\begin{aligned} \text{धरातलों के बीच का पृष्ठफल} &= \text{ताय} \int \frac{\text{तार}}{\cos \theta} \text{ और समग्र पृष्ठफल} \\ &= \int \text{ताय} \int \frac{\text{तार}}{\cos \theta} = \iint \sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} \right)^2 + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{तार}} \right)^2 \right\}} \text{तार ताय} \end{aligned}$$

१५० प्रक्रम और द्विगुण चलानयन से

यहाँ यदि पहले तार को स्थिर मान चलानयन करो तो यल धरातल के समानान्तर धरातल जो हैं उन के बीच का पहले पृष्ठफल आवेगा फिर इस पर से तार के वश से समग्र पृष्ठफल आ जायगा ।

पृष्ठ के समीकरण के वश से $\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}$, $\frac{\text{ताल}}{\text{तार}}$ के मान विदित हो जायँगे फिर य, और र के उचित सीमाओं पर से अभीष्ट पृष्ठखण्ड का फल $\iint \sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} \right)^2 + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{तार}} \right)^2 \right\}} \text{तार ताय}$ इस पर से विदित हो जायगा ।

जैसे (१) जिस गोल के पृष्ठ का $y^2 + r^2 + z^2 = a^2$ यह समीकरण है उस के अष्टमांश का पृष्ठफल जानना है तो यहाँ

$$\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} = -\frac{y}{z}, \frac{\text{ताल}}{\text{तार}} = -\frac{r}{z}$$

$$\begin{aligned} \text{इसलिये पृ} &= \iint \sqrt{\left(1 + \frac{y^2}{z^2} + \frac{r^2}{z^2} \right)} \text{तार ताय} \\ &= \iint \frac{\text{अतार ताय}}{\sqrt{\text{अ}^2 - y^2 - r^2}} \\ &= \text{अ} \iint \frac{\text{तार ताय}}{\sqrt{\text{अ}^2 - y^2 - r^2}} = \text{अ} \iint \frac{\text{तार ताय}}{\sqrt{r_1^2 - r^2}} \text{ यदि } \text{अ}^2 - y^2 = r_1^2 \\ \text{परन्तु } \int \frac{\text{तार}}{\sqrt{r_1^2 - r^2}} &= \text{ज्या}^{-1} \frac{r}{r_1} \end{aligned}$$

यहाँ यदि $z = 0$ तो यर धरातल में जो गोलपृष्ठ का अवयव लगा है उस का समीकरण $\text{अ}^2 - y^2 = r_1^2 = r^2$ ऐसा होगा इस में यदि $r = 0$, और $r = r_1$ मानें तो अय अक्ष के ऊपर से य र धरातल और गोलपृष्ठ के सम्पात तक रल धरातल के समानान्तर धरातलों के बीच का

$$\text{पृष्ठफल} = \int_0^{r_1} \frac{\text{तार}}{\sqrt{r_1^2 - r^2}} = \frac{\pi}{2}$$

इसलिये पृ $= \frac{\text{अ}\pi}{2} \int \text{ताय}$ इस में यदि ० और अ के बीच य के मान

में चलानयन करें तो गोल के अष्टमांश पृष्ठ का फल = $\frac{\pi a^2}{2}$ इस लिये

समग्र पृष्ठफल = $4\pi a^2$ ।

इसी स्थान में यदि पहले ताय और फिर तार के वश से चलानयन करें तो ऊपर की युक्ति से अष्टमांश पृष्ठ का फल

$$= \int_0^a \int_0^{y_1} \frac{\text{अताय तार}}{\sqrt{(a^2 - r^2 - y^2)}} \quad \text{। जहाँ } y_1^2 = a^2 - r^2$$

(२) जिस घनक्षेत्र के पृष्ठ का $l^2 + (y \text{ कोज्या } a_1 + r \text{ ज्या } a_1)^2 - a^2 = 0$ यह समीकरण है उस के पृष्ठ फल का क्या मान होगा ।

$$\text{यहाँ } \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} = - \frac{\text{कोज्या } a_1 (\text{यकोज्या } a_1 + r \text{ ज्या } a_1)}{l}$$

$$\frac{\text{ताल}}{\text{तार}} = - \frac{\text{ज्या } a_1 (\text{यकोज्या } a_1 + r \text{ ज्या } a_1)}{l}$$

$$\text{इसलिये पृ} = \iint \frac{\text{अतारताय}}{l} = \iint \frac{\text{अतार ताल}}{\sqrt{\{a^2 - (\text{यकोज्या } a_1 + r \text{ ज्या } a_1)^2\}}}$$

य र धरातल घनपृष्ठ को जहाँ काटता है उस का समीकरण

$a = \pm (\text{यकोज्या } a_1 - r \text{ ज्या } a_1)$ यह है । यहाँ धनचिह्न ग्रहण करने से घन पद में $r = (a - \text{यकोज्या } a_1) \text{ कोज्या } a_1$

$$\text{अब } \int \frac{\text{तार}}{\sqrt{\{a^2 - (\text{यकोज्या } a_1 + r \text{ ज्या } a_1)^2\}}}$$

$$= \frac{1}{\text{ज्या } a_1} \text{ ज्या }^{-1} \frac{\text{य कोज्या } a_1 + r \text{ ज्या } a_1}{a} \quad \text{इस का } r = 0 \text{ और}$$

$r = (a - \text{य कोज्या } a_1) \text{ कोज्या } a_1$ के भीतर का मान

$$= \frac{1}{\text{ज्या } a_1} \left(\frac{\pi}{2} - \text{ज्या }^{-1} \frac{\text{यकोज्या } a_1}{a} \right)$$

$$\text{इस लिये पृ} = \frac{a}{\text{ज्या } a_1} \int \left(\frac{\pi}{2} - \text{ज्या }^{-1} \frac{\text{यकोज्या } a_1}{a} \right) \text{ ताय}$$

इस में यदि $\text{ज्या }^{-1} \frac{\text{यकोज्या } a_1}{a} = s$, तो $\frac{\text{अज्यास}}{\text{कोज्या } a_1} = y$ और

$$\frac{\text{अकोज्यासतास}}{\text{कोज्याअ}_2} = \text{ताय}$$

इसलिये

$$\int \text{तायज्या}^{-1} \frac{\text{यकोज्याअ}_2}{\text{अ}} = \int \frac{\text{असकोज्यासतास}}{\text{कोज्याअ}_2} = \frac{\text{अ}}{\text{कोज्याअ}_2} \int \text{सकोज्यासतास}$$

$$= \frac{\text{अ}}{\text{कोज्याअ}_2} (\text{सज्यास} + \text{कोज्यास})$$

अब ० और $\frac{\text{अ}}{\text{कोज्याअ}_2}$ के भीतर य के मान में

$$\text{पृ} = \frac{\text{अ}}{\text{ज्याअ}_2} \int \frac{\text{अ}}{\text{कोज्याअ}_2} \left(\frac{\pi}{2} - \text{ज्या}^{-1} \frac{\text{यकोज्याअ}_2}{\text{अ}} \right) \text{ताय}$$

$$= \frac{\text{अ}}{\text{ज्याअ}_2} \left(\frac{\pi}{2} \frac{\text{अ}}{\text{कोज्याअ}_2} + \frac{\text{अ}}{\text{कोज्याअ}_2} - \frac{\pi}{2} \frac{\text{अ}}{\text{कोज्याअ}_2} \right) = \frac{\text{अ}^2}{\text{ज्याअ}_2 \text{कोज्याअ}_2}$$

यह पृष्ठफल धन पद में जो घनक्षेत्र का खण्ड है उस का हुआ ।

यदि ध्यान दे कर विचार करो तो जिस घनक्षेत्र के पृष्ठ का समीकरण ऊपर लिख कर दिखाया है वह एक समतलमस्तक रूप शङ्कु है जिस के अक्ष का समीकरण $l = 0$, $y \text{ कोज्याअ}_2 + r \text{ ज्याअ}_2 = 0$ ऐसा होगा ।

१५३। बहुत से घनक्षेत्र के पृष्ठ ऐसे होते हैं जिन के पृष्ठ का अवयव जो १५२ प्रक्रम में देखा गया है एक ही होते हैं । जैसे जिस पृष्ठ का $2\text{अल} = \text{य}^2 + \text{र}^2$ यह समीकरण है उस में

$$\left(\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} \right)^2 + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{तार}} \right)^2 = \frac{\text{य}^2 + \text{र}^2}{\text{अ}^2} \text{ और जिस के पृष्ठ का समीकरण}$$

$$\text{अल} = \text{यर} \text{ यह है उस में भी } \left(\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} \right)^2 + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{तार}} \right)^2 = \frac{\text{य}^2 + \text{र}^2}{\text{अ}^2}$$

वही सिद्ध होता है इस लिये दोनों में पृष्ठ का परमावमान अर्थात् तात्कालिकी गति एक ही है । ऐसे पृष्ठों का यूलर (Euler) ने Congruent नाम रक्खा है मैं इन्हें समगतिक पृष्ठ कहता हूँ ।

इसी प्रकार $(\text{ल}-\text{ग})^2 = \{ (\text{य}-\text{अ})^2 + (\text{र}-\text{क})^2 \}$ स्पष्ट है इस शङ्कु और

यकोज्याअ_r + र कोज्याक_r + ल कोज्याइ = घ इस धरातल में भी पृष्ठ का अवयव एक ही है । जहाँ कोज्या^१अ_r + कोज्या^१क_r + कोज्या^१इ = १ इसी तरह

$$२अल = य^२ + र^२$$

$$२अल = (य^२ - र^२)ग + २यर\sqrt{(१ - ग^२)}$$

$$२अल = \left\{ (य^२ + र^२)^२ - ४कयर + २ग(य^२ - र^२) + क^२ + ग^२ \right\}^{\frac{१}{२}}$$

इत्यादि सब पृष्ठ समगतिक पृष्ठ हैं ।

१५४। यदि स्पर्शधरातल में ऐसा एक अवयव लें जिस का यर धरातल में परिणत मान श्रुताश्रुताप यह हो तो

$$पृ = \int \int \sqrt{\left\{ १ + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}\right)^२ + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{तार}}\right)^२ \right\}} \text{श्रुताश्रुताप}$$

जैसे जिस घनक्षेत्र के पृष्ठ का यर = अल यह समीकरण है वह य^२ + र^२ = ग^२ इस वृत्त से काटा गया तो कटे खण्ड का पृष्ठफल जानना हो तो यहाँ

$$\text{छेइ} = \sqrt{\left(१ + \frac{य^२}{अ^२} + \frac{र^२}{अ^२}\right)} = \frac{\sqrt{(अ^२ + श्रु^२)}}{अ} \text{ क्योंकि } य^२ + र^२ = श्रु^२$$

$$\text{इस लिये } पृ = \int_०^{२\pi} \int_३ \frac{ग\sqrt{(अ^२ + श्रु^२)}}{अ} \text{श्रुताश्रुताप}$$

$$\text{परन्तु } \int \frac{\sqrt{(अ^२ + श्रु^२)}}{अ} \text{श्रुताश्रुताप} = \frac{१}{३अ} (अ^२ + श्रु^२)^{\frac{३}{२}}$$

$$\text{इस लिये } \int_०^g \frac{ग\sqrt{(अ^२ + श्रु^२)}}{अ} \text{श्रुताश्रुताप} = \frac{१}{३अ} \left\{ (अ^२ + ग^२)^{\frac{३}{२}} - अ^३ \right\}$$

$$\text{और } \int \frac{१}{३अ} \left\{ (अ^२ + ग^२)^{\frac{३}{२}} - अ^३ \right\} \text{ताप} = \frac{ष}{३अ} \left\{ (अ^२ + ग^२)^{\frac{३}{२}} - अ^३ \right\}$$

$$\text{इस लिये अभीष्ट पृष्ठफल} = \int_०^{२\pi} \int_०^g \frac{ग\sqrt{(अ^२ + ग^२)}}{अ} \text{श्रुताश्रुताप}$$

$$= \frac{२\pi}{३अ} \left\{ (अ^२ + ग^२)^{\frac{३}{२}} - अ^३ \right\}$$

१५५। यदि पृष्ठ का अक्षीय समीकरण लें अर्थात्

$y = \text{श्रुज्याप कोज्याप}, r = \text{श्रुज्यापज्याप}, l = \text{श्रु कोज्याप}$

और इन पर से ताय, तार इत्यादि का मान बना कर

$$p = \int \int \sqrt{\left\{ 1 + \left[\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} \right]^2 + \left[\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \right]^2 \right\}} \text{ तार ताय}$$

इस में उत्थापन दें तो

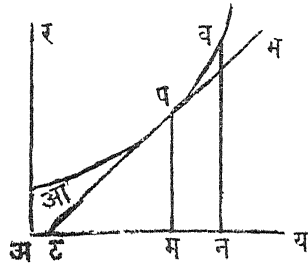
$$p = \int \int \sqrt{\left\{ \text{श्रुज्याप}^2 + \left[\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताय}} \right]^2 \text{ज्याप}^2 + \left[\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताय}} \right]^2 \right\}} \text{श्रुताय ताय}$$

ऐसा सिद्ध होगा। जहाँ सुभीता समझ पड़े तहाँ इस पर से भी उचित सीमाओं के भीतर पृष्ठफल जान सकते हो विस्तार के भय से बहुत बढ़ाना नहीं चाहते। २५० प्रक्रम के (३) उदाहरण तक पहुँचोगे तो स्पष्ट घनक्षेत्र हो जायगा।

वक्र का घनफलानयन ।

१५६। कल्पना करो कि आ, वक्र में नियत विन्दु और प कोई विन्दु है

जिस का भु = अम = य, को = पम = र और मान लो कि आ के भुज से य बड़ा है।



कल्पना करो कि आपव वक्र य अक्ष के चारो ओर घूम कर घनक्षेत्र बनाता है तो यदि आ और प विन्दु में गये और य अक्ष पर लम्बरूप ऐसे दो घरातलों से घनक्षेत्र को काटें और इन दोनों घरातलों के बीच में के घनफल को घ कहें तो चलनकलन के १६० वें प्रक्रम से

$$\frac{\text{ताघ}}{\text{ताय}} = \pi r^2$$

इस लिये $घ = \int \pi r^2 \text{ ताय}$

वक्र के समीकरण से र का ज्ञान य के फल के रूप में आजायगा। समझ लो कि $\int \pi r^2 \text{ ताय} = \text{फा(य)}$ तो

$$घ = \text{फा(य)} + \text{स्थि}$$

कल्पना करो कि जिस विन्दु का भु = y_1 उस का घनफल = $घ_1$ और जिस विन्दु का भु = y_2 उस का घनफल = $घ_2$ है तो

$$घ_१ = फा(य_१) + स्थि$$

$$घ_२ = फा(य_२) + स्थि$$

$$इस लिये घ_२ - घ_१ = फा(य_२) - फा(य_१) = \int_{य_१}^{य_२} \pi r^2 \text{ताय} = \pi \int_{य_१}^{य_२} r^2 \text{ताय}$$

१५७। समसूच्याकार शङ्कु का घनफलानयन ।

कल्पना करो कि एक सरल रेखा अ मूल बिन्दु में हो कर गई है और य अक्ष से अ तुल्य कोण बनाती है तो य अक्ष के चारो ओर इस के घूमने से समसूची उत्पन्न होगी (१४३वाँ प्रक्रम देखो) इस लिये यहाँ $r = y \cdot \text{स्पअ}$

$$घ = \int \pi \text{स्पअ}^२ y^२ \text{ताय} = \frac{\pi \text{स्पअ}^२ \cdot y^३}{३} + स्थि$$

$$\text{और } घ_२ - घ_१ = \frac{\pi \text{स्पअ}^२}{३} (y_२^३ - y_१^३)$$

कल्पना करो कि $y_१ = ०$ और $\text{त्रि} = y_२ \cdot \text{स्पअ}$ अर्थात् $y_२ = \frac{\text{त्रि}}{\text{स्पअ}}$ तो

समसूच्याकार शङ्कु (जिसके आधार परिधि का व्यासार्द्ध त्रि है) का

$$\text{घनफल} = \frac{\pi \text{स्पअ}^२}{३} \times \frac{\text{त्रि}^३}{\text{स्पअ}^३} = \frac{\pi \text{त्रि}^३}{३ \text{स्पअ}} = \frac{\pi \text{त्रि}^२ y_२}{३}$$

इस से यह सिद्ध होता है कि समखात फल की तिहाई सूची का घनफल होता है। इस को भास्कराचार्य ने भी अपनी लीलावती में लिखा है।

१५८। गोल का घनफलानयन ।

$$\text{यहाँ } r^२ = अ^२ - y^२$$

$$\text{इस लिये } घ = \int \pi r^२ \text{ताय} = \pi \int (अ^२ - y^२) \text{ताय}$$

$$= \pi (अ^२ y - \frac{y^३}{३}) + स्थि । \text{ य} = ० \text{ और } \text{य} = अ \text{ मानने से आधे गोल का}$$

$$\text{घनफल} = \frac{२ \pi अ^३}{३} \text{ इस लिये सम्पूर्ण घनफल} = \frac{४ \pi अ^३}{३} = \frac{४ \pi अ^२ \times २अ}{६}$$

$$= \frac{\text{पृफ} \times \text{व्या}}{६} \text{ अर्थात् पृष्ठफल को व्यास से गुण कर छ का भाग देने से}$$

गोल का घनफल होता है। इस को भी भास्कराचार्य ने अपनी लीलावती में लिखा है।

१५९। जिस परवलय का $r^२ = ४अय$ यह समीकरण है य अक्ष के चारो ओर उस के घूमने से जो घनक्षेत्र होगा उस का

$$घ = \int \pi r^2 \text{ताय} = \pi \int \delta \text{अय ताय} = \delta \text{अ} \pi \int \text{यताय} = 2\text{अ} \pi \text{य}^2 + \text{स्थि}$$

इस लिये $घ_2 - घ_1 = 2\text{अ} \pi (\text{य}_2^2 - \text{य}_1^2)$ इस में यदि $\text{य}_1 = 0$ तो क्षेत्र के समीकरण से $घ_1 = 0$ इस लिये r_2 कोटि से बने वृत्त और शिरः स्थान के

$$\text{भीतर का घनफल} = 2\text{अ} \pi \text{य}_2^2 = \frac{\delta \text{अय}_2 \pi \text{य}_2}{2} = \frac{\pi r_2^2 \text{य}_2}{2}$$

अर्थात् जिस समतलमस्तकपरिधि शङ्कु का आधार r_2 त्रिज्या से उत्पन्न परिधि हो और उँचाई य_2 हो उस के घनफल के आधे के बराबर उसी उँचाई और उसी आधार से जो परवलय का घनक्षेत्र होगा उस का घनफल होगा ।

१६०। चलनकलन के ३८८ पृष्ठ में जो चक्रालद (Cycloid) का समीकरण $r = क (अ + ज्याय)$, $य = क (१ - कोज्याअ)$ यह लें तो य अक्ष के चारो ओर इस के घूमने से जो घनक्षेत्र होगा उस का

$$घ = \int \pi r^2 \text{ताय} = \pi क^3 \int (अ + ज्याअ)^2 ज्याअताअ$$

$$= \pi क^3 \int (अ^2 + २अज्याअ + ज्या^2अ) ज्याअताअ$$

यहाँ खण्डचलानयन से

$$\int अ^2 ज्याअताअ = - अ^2 कोज्याअ + २ \int अकोज्याअताअ$$

$$= - अ^2 कोज्याअ + २अज्याअ + २कोज्याअ ।$$

$$\int २अज्या^2अताअ = \int अ(१ - कोज्या२अ)ताअ$$

$$= \frac{अ^2}{२} - \frac{अज्या२अ}{२} - \frac{कोज्या२अ}{४} ।$$

$$\text{और } \int ज्या^2अताअ = \frac{कोज्याअज्या^2अ}{३} + \frac{२}{३} \int ज्याअताअ$$

$$= - \frac{कोज्याअज्या^2अ}{३} - \frac{२कोज्याअ}{३} \quad (१२ वें प्रक्रम के १५ वें उदाहरण से) ।$$

अब आधे चक्रालद के घूमने से जो घनक्षेत्र होता है उस के घनफल का ज्ञान करना हो तो $य = 0$ और $य = २क$ वा $अ = 0$, $अ = \pi$ के भीतर ऊपर के चलों का मान ले आने से

$$\int_0^{\pi} अ^2 ज्याअताअ = \pi^2 - २ - २ = \pi^2 - ४$$

$$२ \int_0^{\pi} अज्या^2अताअ = \frac{\pi^2}{२} - \frac{१}{४} + \frac{१}{४} = \frac{\pi^2}{२},$$

घनफलानयन ।

$$\text{और } \int_0^{\pi} \pi \text{ ज्या}^2 \text{अताअ} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3},$$

इस लिये अभीष्टघनफल

$$= \pi k^2 \left\{ \pi^2 - \frac{\pi^2}{2} + \frac{2\pi^2}{3} \right\} = \pi k^2 \left(\frac{3\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2} \right) ।$$

१६१। यदि वक्र र अक्ष के चारो ओर घूम कर घनक्षेत्र बनावे तो स्पष्ट है कि उस का घनफल य और र को बदल देने से $\int \pi y^2 \text{तार}$ यह होगा । इस

लिये $घ_2 - घ_1 = \pi \int_{r_1}^{r_2} y_2^2 \text{तार}$ ऐसा होगा ।

१६२। परवलय का $r^2 = 4ay$ यह समीकरण है और यह र अक्ष के चारो ओर घूम कर घनक्षेत्र बनाता है तो इस का घन फल ऊपर के प्रक्रम से

$$घ = \int \pi y^2 \text{तार} = \pi \int \frac{r^2}{4a} \text{तार} = \frac{\pi r^4}{40a^2} + \text{स्थि}$$

इस लिये $घ_2 - घ_1 = \frac{\pi(r_2^4 - r_1^4)}{40a^2}$ । इस में यदि $r_1 = 0$ तो क्षेत्र के समीकरण से $घ_1 = 0$ इस लिये r_2 त्रिज्या से बने वृत्त और शिरः स्थान के भीतर का घनफल $= \frac{\pi r_2^4}{40a^2}$ ।

१६३। यदि दो वक्र य अक्ष के चारो ओर घूम कर दो घनक्षेत्र बनाते हों तो जो धरातल य अक्ष पर लम्ब है ऐसे दो धरातलों से दोनों घनक्षेत्रों के काटने से उन के भीतर जो घनफल होंगे उन के अन्तर को घ कहो और पहले वक्र का $r = f(y)$ यह और दूसरे का $r = g(y)$ यह समीकरण हो तो पिछले प्रक्रमों से स्पष्ट है कि $घ = \pi \int [\{ f(y) \}^2 - \{ g(y) \}^2] \text{तार}$ यह होगा ।

जिन दोनों लम्बरूपी धरातलों से दोनों घनक्षेत्रों को काटा है उन का समीकरण क्रम से यदि $y = y_1$, $y = y_2$ ऐसे हों तो ऊपर के चल में y_1 , y_2 के भीतर जो मान होगा वही घनफलों का अन्तर होगा ।

कल्पना करो कि एक सीमित वक्र ऐसा है कि एक सरल रेखा जिस का समीकरण $r = k$ है उस के सब कोटि खण्डरूपी पूर्णज्याओं का समान द्विभाग करती है (१४८वें प्रक्रम का क्षेत्र देखो) तो पूर्णज्या का मान यदि $f(y)$ हो तो रेखा के नीचे वक्र के भाग का समीकरण $r = a - f(y) = f_1(y)$ और ऊपर

के भाग का समीकरण $r = k + f(y) = f(y)$ ऐसा होगा । इस लिये दोनों भागों से उत्पन्न घनक्षेत्र का फल $= \vartheta = \pi \int [\{ f(y) \}^3 - \{ f_a(y) \}^3] \text{ताय}$
 $= 2\pi k \int f(y) \text{ताय}$

कल्पना करो कि सीमित वक्र के दोनों प्रान्त के जहाँ कोटि वक्र की स्पर्शरेखा हो जाती है भुज क्रम से y_1, y_2 हैं तो य अक्ष के चारो ओर सीमित वक्र के घूमने से जो घनक्षेत्र उत्पन्न होगा उस का घन—

$$\text{फल} = 2\pi k \int_{y_1}^{y_2} f(y) \text{ताय यह होगा ।}$$

यह अक्ष के चारो ओर वक्र के घूमने से जो घनक्षेत्र होगा इस वाक्य का तात्पर्य यह है कि य, और r अक्ष से जितने जितने अन्तर पर वक्र के प्रत्यवयव हैं उतने ही उतने ही अन्तर पर सर्वत्र रहें ऐसा वक्र को चारो ओर घुमाने से वक्र के आकार के बरा से आकाश में जो घनाकृति उत्पन्न हो वही वक्रजन्य घनक्षेत्र है ।

ऊपर के घनफल में अर्थात् $\pi \int [\{ f(y) \}^3 - \{ f_a(y) \}^3] \text{ताय}$ इस में यदि $f(y)$ के स्थान में r और $f_a(y)$ के स्थान में r' रख दें तो

$$\vartheta = \pi \int (r^3 - r'^3) \text{ताय} = \pi \int (r + r') (r - r') \text{ताय} = 2\pi k \int (r - r') \text{ताय}$$

ऐसा होगा परन्तु $\int (r - r') \text{ताय}$ यह पिछले अध्याय से सीमित वक्र का फल है ।

इस लिये यदि सम्पूर्ण वक्र का फल आ हो तो सम्पूर्ण घनक्षेत्र का फल $2\pi k \times$ आ होगा । यहाँ भी १४८ प्रक्रम के ऐसा समझ लेना चाहिये कि वक्र का सब भाग य अक्ष के ऊपर है । यदि वक्र का कुछ भाग य अक्ष के नीचे भी हो तो सहज में दिखला सकते हो कि $2\pi k \times$ आ यह य अक्ष के नीचे और ऊपर के घनक्षेत्र विभागों के घन फलों का अन्तर होगा ।

जैसे १४८ प्रक्रम में जो $(y - c)^2 + (r - j)^2 - g^2 = 0$ इस वृत्त के य अक्ष के चारो ओर घूमने से गोलीय मुद्रिका होगी उस का घनफल ऊपर की युक्ति से $2\pi g^2 j$ यह होगा जहाँ g वृत्त का व्यासार्द्ध और j ; य अक्ष से वृत्त के केन्द्र का लम्बरूपी अन्तर है ।

१६३। इसी तरह यदि दोनों वक्र जिन के समीकरण क्रम से

$$y = f(r), \quad y = f_a(r)$$

ये हैं r अक्ष के चारो ओर घूमकर घनक्षेत्र बनावें तो ऊपर के प्रक्रम की युक्ति से घनफलान्तर $= \vartheta = \pi \int [\{ f(r) \}^3 - \{ f_a(r) \}^3] \text{तार यह होगा ।}$

फिर इस पर से पूर्ववत् विचार कर सकते हो ।

१६५। १५६वें प्रक्रम में घनफल के लिये जो युक्ति लिखी गई है उसी युक्ति से चाहे जैसा घनक्षेत्र हो सब का घनफल जान सकते हैं ।

जैसे किसी घनक्षेत्र को य अक्ष पर लम्ब जो धरातल है उस से काटें और कटे क्षेत्र का फल फ(य) कल्पना करें तो स्पष्ट है कि इस लम्बरूपी धरातल के बहुत ही पास जो दूसरा लम्बरूप धरातल है उस से भी जो कट कर दोनों धरातलों के बीच में घनक्षेत्र का घनफल Δ घ है वह फ(य) Δ य के समान होगा इस लिये

$$\frac{\Delta \text{घ}}{\Delta \text{य}} = \text{फ(य)} \quad \Delta \text{ य को शून्य अर्थात् ताय मानने से}$$

$$\frac{\text{ताघ}}{\text{ताय}} = \text{फ(य)} \quad \therefore \text{घ} = \int \text{फ(य)} \text{ ताय ऐसा होगा ।}$$

१६५। दीर्घवृत्तीय घनक्षेत्र जिसके पृष्ठ का समीकरण

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{k^2} + \frac{z^2}{g^2} = 1 \text{ यह है उसका घनफलानयन ।}$$

यहाँ यदि घनक्षेत्र को य अक्ष पर लम्ब धरातल से काटो जो कि मूल बिन्दु से य तुल्य हट कर य अक्ष में लगा है तो घनक्षेत्र के लक्षण से कटा हुआ प्रदेश एक दीर्घवृत्त होगा जिसके दोनों व्यासार्द्ध क्रम से

$$k\sqrt{\left[1 - \frac{y^2}{a^2}\right]}, g\sqrt{\left[1 - \frac{y^2}{a^2}\right]} \text{ ये हैं इस लिये छेदित प्रदेश का}$$

फल = फ(य) = π क ग $\left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)$ यह हुआ और अभीष्ट क्षेत्र का संपूर्ण घनफल

$$= \int_{-a}^a \left[1 - \frac{y^2}{a^2}\right] \pi \text{ क ग ताय} = \frac{8\pi}{3} \text{ अ क ग}$$

१६६। किसी सूची क्षेत्र का घनफलानयन ।

कल्पना करो कि सूची का आधार कोई बहुभुजक्षेत्र है जिस का फल आ है और सूची का बेध वा उँचाई वे है तो यदि भुज, कोटि शङ्कुओं का मूल बिन्दु सूची का शिरःस्थान मानें और य अक्ष को सूची के आधार पर लम्ब रूप मानें तो १६४ प्रक्रम की युक्ति से सूची का घनफल $\int_0^{\text{वे}} \text{फ(य)} \text{ ताय}$ यह होगा । अब यदि य अक्ष पर लम्बरूपी धरातल से सूची को काटें

तो स्पष्ट है कि छेदित प्रदेश आधार का सजातीय होगा इस लिये इस प्रदेश का फल = $f(y) = \frac{y^2 \text{आ}}{वे^2}$ इस लिये सूची का घनफल

$$= \int_0^{\text{वे}} f(y) \text{ताय} = \int_0^{\text{वे}} \frac{y^2 \text{आ}}{वे^2} \text{ताय} = \frac{\text{आ}}{वे^2} \int_0^{\text{वे}} y^2 \text{ताय} = \frac{\text{आ} \cdot \text{वे}}{3}$$

बहुभुज क्षेत्र रूपी आधार के स्थान में यदि कोई सीमित क्षेत्र हो तब भी यही घनफल आवेगा। इस पर से यह सिद्ध होता है कि आधार पर वेध तुल्य वेध में जो समखात का घनफल होता है उसके तृतीयांश के तुल्य सूची का घनफल होता है। इसको भी भास्कराचार्य ने अपनी लीलावती के खातव्यवहार में लिखा है (समखातफलत्र्यंशः सूचीखाते फलं भवति) परन्तु इसकी उपपत्ति कहीं नहीं लिखी है।

१६७। कल्पना करो कि $\frac{y^2}{अ^2} - \frac{r^2}{क^2} - \frac{l^2}{ग^2} = १$ यह एक आतिपरवलय-

यिक घनक्षेत्र का समीकरण और $\frac{y^2}{अ^2} - \frac{r^2}{क^2} - \frac{l^2}{ग^2} = ०$ यह एक सम-

सूच्याकार शङ्कु का समीकरण है तो पहले घनक्षेत्र को y अक्ष पर लम्ब और मूल बिन्दु से y तुल्य हट कर y अक्ष में लगा हुआ जो धरातल है उस से काटें तो छेदित प्रदेश एक दीर्घवृत्त होगा जिस का फल $f(y) =$

π क ग $\left[\frac{y^2}{अ^2} + १ \right]$ यह होगा और उसी धरातल से शङ्कु का छेदित

प्रदेश भी दीर्घवृत्तही होगा जिसका फल = $f_1(y) = \frac{\pi \text{ क ग } y^2}{अ^2}$ इस लिये

दोनों का अन्तर π क ग यह हुआ। इस लिये शङ्कु, आतिपरवलयिक और दो लम्ब रूपी धरातल जो मूल बिन्दु से क्रम से y_1, y_2 तुल्य हट

कर y अक्ष में लगे हैं उनके भीतर का घनफल = $\int_{y_1}^{y_2} \pi \text{ क ग } \text{ताय}$

$$= \pi \text{ क ग } (y_2 - y_1)$$

१६८। जिन समानान्तर धरातलों से घनक्षेत्र को काट कर ऊपर के प्रक्रमों में घनफल साधन की युक्ति दिखाई है वे यदि y अक्ष पर लम्ब न हों किन्तु y अक्ष उन से $अ_1$ तुल्य झुका हो तो स्पष्ट है कि $\int f(y) \text{ताय}$ इस

के स्थान में $\int f(y)$ ज्याअर,ताय इस को लेने से घनफल का मान आ जायगा ।

१६९। १६४वें प्रक्रम से सिद्ध है कि घ = $\int f(y)$ ताय इस लिये $f(y)$ को कल्पना कर लें कि किसी वक्र की कोटि र है तो १३८वें प्रक्रम की युक्ति से तीन समानान्तर वा चार समानान्तर धरातलों से जिन का परस्पर अन्तर = च है छेदित प्रदेश के फलों से आद्यन्त धरातलान्तर्गत घन फल का स्वल्पान्तर से मान $\frac{3}{4} (आ_० + ४ आ_१ + आ_२)$ वा $\frac{3}{4} \{ आ_० + आ_३ + ३(आ_१ + आ_२) \}$ यह होगा जहाँ $r_०, r_१, r_२$ इत्यादि के स्थान में $आ_०, आ_१$ इत्यादि को रख दिया है ।

१७०। १५६वें प्रक्रम से सिद्ध है कि घ = $\int \pi r^२$ ताय परन्तु

$\pi r^२ = \int २ \pi r$ तार इस लिये द्विगुण चलानयन की रीति से घनफल को $\int \int २ \pi r$ तार ताय = $२ \pi \int \int r$ तार ताय इससे प्रकाश कर सकते हैं। ११४वें प्रक्रम के क्षेत्र को यदि य अक्ष के चारो ओर घुमावें तो द ट चतुर्भुज से एक वलय उत्पन्न होगा जिसका घनफल स्वल्पान्तर से $२ \pi r \Delta y \Delta r$ यह होगा और एक स्तम्भ में जितने चतुर्भुज हैं सब से उत्पन्न वलयों के घनफल का योग $\Delta y \int_{f(y)}^{फा(y)} २ \pi r$ तार अर्थात्

$$\Delta y \times २ \pi \int_{f(y)}^{फा(y)} r \text{ तार} = \pi \Delta y [\{ फा(y) \}^२ - \{ फ(y) \}^२] \text{ यह होगा}$$

इस लिये काता कत के घूमने से जो घनक्षेत्र होगा उस का घनफल

$$= \pi \int_{अगा}^{अचा} [\{ फा(y) \}^२ - \{ फ(y) \}^२] \text{ ताय}$$

$$= \int_{य_१}^{य_२} \int_{फ(y)}^{फा(y)} २ \pi r \text{ तार ताय}$$

$$= २ \pi \int_{य_१}^{य_२} \int_{फ(y)}^{फा(y)} r \text{ तार ताय यदि अचा} = य_२, \text{ अगा} = य_१$$

ऊपर के $\pi \int_{\text{अर्ध}}^{\text{अर्ध}} [\{ \text{फा}(y) \}^2 - \{ \text{फ}(y) \}^2]$ ताय इस समीकरण में अगा

यदि फा(y) के स्थान में फ (y) और फ (y) के स्थान में फा(y) को रख दें तो ठीक १६३वें प्रक्रम का समीकरण हो जायगा ।

१७१। यदि जिन वक्रों के क्रम से $y = \text{फ}(r)$, $y = \text{फा}(r)$ ये समीकरण हैं उन के चाप से और जिन रेखाओं के क्रम से $r = r_1$, $r = r_2$ ये समीकरण हैं उन से बना हुआ क्षेत्र य अक्ष के चारो ओर घूम कर घनक्षेत्र बनावे तो ऊपर की युक्ति से उसका घनफल $= 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \int_{\text{फ}(r)}^{\text{फा}(r)} r$ ताय तार पेसा

होगा इस का ताय के वश यदि चल बना लो तो

$$घ = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \{ \text{फ}(r) - \text{फा}(r) \} r \text{ तार}$$

१७२। ऊपर के प्रक्रमों की व्याप्ति दिखलाने के लिये ११६वें प्रक्रम का क्षेत्र लो । कल्पना करो कि अलक वक्र क्षेत्र य अक्ष के चारो ओर घूम कर जो घन क्षेत्र बनाया उसका घनफल जानना है तो स्पष्ट है कि कनल के घूमने से जो अर्द्ध-गोल होगा और अनल के घूमने से जो परवलय संबन्धि घनक्षेत्र होगा उनके घनफलों के अन्तर के समान अभीष्ट घनफल होगा । इन दोनों घनक्षेत्रों का घनफल पिछले प्रक्रमों से विदित है इसलिये अभीष्ट घनक्षेत्र का घनफल भी इन दोनों के अन्तर पर से विदित होगा इसलिये द्विगुण चलानयन से जो इसका घनफल निकलेगा उसकी जाँच अच्छी तरह से इस उदाहरण में होगी अर्थात् दोनों रीति से फलों का मान एक हो जानेसे मन भर जायगा मानो कि नमूल विन्दु और नक य अक्ष में धनात्मक मार्ग है तो अल वक्र का समीकरण $r^2 = ४ अ (अ - y)$ और कल का $r^2 = ४ अ^2 - y^2$ यह होगा ।

इस लिये ऊपर के प्रक्रम की युक्ति से अभीष्ट घनफल

$$= \int_0^{2अ} \int_{\frac{४अ^2 - r^2}{४अ}}^{\sqrt{(४अ^2 - r^2)}} 2\pi r \text{ ताय तार}$$

इसी जगह यदि यह इच्छा होकि पहले र के वश से चलानयन करें तो अलक का अफ रेखा से दो विभाग करने से

$$घ = \text{वृत्त खण्ड का घ} \cdot \text{फ} + \text{परवलय के खण्ड का घ} \cdot \text{फ}$$

$$= \int_{अ}^{२अ} \int_0^{\sqrt{(४अ^२-य^२)}} \sqrt{(४अ^२-य^२)} \ २ \pi \ r \ तार \ ताय$$

$$+ \int_0^अ \int_{\sqrt{(४अ^२-४अय)}}^{\sqrt{(४अ^२-य^२)}} \sqrt{(४अ^२-य^२)} \ २ \pi \ r \ तार \ ताय$$

इसी जगह यदि य अक्ष के चारो ओर घलग के घूमने से जो घनक्षेत्र बने उसका घनफल अपेक्षित हो तो मान लो कि य अक्ष की घनात्मक दिशा नघ की ओर है तब न को मूल बिन्दु मानने से लग का समीकरण $r^२ = ४अ (अ + य)$ और लघ का $r^२ = ४अ^२ - य^२$ यह होगा ।

$$\text{इस लिये अपेक्षित घनफल} = \int_0^{२अ} \int_{\sqrt{(४अ^२-य^२)}}^{\sqrt{(४अ^२+४अय)}} \sqrt{(४अ^२+४अय)} \ २ \pi \ r \ तार \ ताय$$

इसी स्थान में यदि पहले य के वश से चल अपेक्षित हो तो लल, रेखा से अभीष्ट क्षेत्र का दो विभाग कर देने से

घ = वृत्तखण्ड का घफ + परवलयखण्ड का घफ

$$= \int_0^{२अ} \int_{\sqrt{(४अ^२-र^२)}}^{२अ} २ \pi \ r \ तार \ तार$$

$$+ \int_0^{२अ} \frac{\sqrt{३}}{४अ} \sqrt{२^२-४अ^२} \ २ \pi \ r \ तार \ तार$$

१७३। यदि क्षेत्र र अक्ष के चारो ओर घूमने से घनक्षेत्र बनावे तो य, र का परस्पर बदल देने से ऊपर की युक्ति से सहज में सिद्ध हो जायगा कि

$$\text{घ} = \int \int २ \pi \ य \ ताय \ तार \ ।$$

१७४। किसी घनक्षेत्र के पृष्ठ में एक प बिन्दु और इस बिन्दु के बहुत ही पास दूसरी व बिन्दु लेकर दोनों बिन्दुओं में लगा कर यल, रल धरातलों के समानान्तर दो दो धरातलों को बनाओ तो घनक्षेत्र के भीतर एक आयत आधार के ऊपर समखात बन जायगा जिस के आधार का भुज य, कोटि र और वेध, ल होगा इस लिये समखात का घनफल = ल Δ य Δ र । Δ य, Δ र को बहुत छोटा मानने से समखात का घनफल = ल तार ताय, इस लिये समग्र घनफल =

$$\int \int \text{ल तार ताय इस में पहले यदि } \int \text{ल तार इस का मान निकालो तो स्पष्ट है}$$

कि यह य अक्ष पर लम्ब जो धरातल है उस से छेदित प्रदेश का फल होगा इसे यदि फ(य) के बराबर मान लो तो समग्र घनफल = \int फ(य) ताय यही १६४वें प्रक्रम से भी सिद्ध हुआ है।

इसी में यदि पहले \int ल ताय इस का मान निकालो तो यह र अक्ष पर लम्ब रूप धरातल जो होगा उस से छेदित प्रदेश का फल होगा इस लिये इस को यदि फ(र) कहो तो ऊपर की युक्ति से समग्र घनफल = \int फ(र) तार। सर्वत्र सीमाओं का विचार कर घनफल निकालना चाहिये।

१७५। दैर्घवृत्तीय घनक्षेत्र का अष्टमांश घनफल (जिस के पृष्ठ का समीकरण $\frac{y^2}{a^2} + \frac{r^2}{k^2} + \frac{z^2}{g^2} = 1$ यह है) जानना हो तो यहाँ

$$l = g\sqrt{\left(1 - \frac{y^2}{a^2} - \frac{r^2}{k^2}\right)}$$

इस लिये घ = $g \int \int \sqrt{\left(1 - \frac{y^2}{a^2} - \frac{r^2}{k^2}\right)}$ तार ताय

$$\begin{aligned} \text{यहाँ पहले } \int \sqrt{\left(1 - \frac{y^2}{a^2} - \frac{r^2}{k^2}\right)} \text{ तार} &= k \int \sqrt{\left(1 - \frac{y^2}{a^2} - \frac{r^2}{k^2}\right)} \frac{\text{तार}}{k} \\ &= k \left\{ \frac{r}{2k} \sqrt{\left(1 - \frac{y^2}{a^2} - \frac{r^2}{k^2}\right)} + \frac{\left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)}{2} \text{ज्या}^{-1} \frac{r}{k\sqrt{\left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)}} \right\} \end{aligned}$$

इस में $r=0$ और $r=k\sqrt{1 - \frac{y^2}{a^2}}$ के भीतर का चल

$$= \frac{\pi k}{8} \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)। \text{ इस लिये घ} = \int \frac{\pi k g}{8} \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right) \text{ ताय}$$

$$= \frac{\pi k g}{8} \left[y - \frac{y^3}{3a^2} \right] \quad \circ \text{ और } a \text{ के बीच } y \text{ के मान में समग्र का } \frac{1}{2} \text{ घन}$$

$$\text{फल} = \frac{\pi k g}{8} \left(a - \frac{a^3}{3a^2}\right) = \frac{\pi k g}{8} \cdot \frac{2a}{3} = \frac{\pi a k g}{6} \text{ इस को } 2 \text{ से गुण देने से}$$

सम्पूर्ण घनफल = $\frac{4\pi a k g}{3}$ । यही १६५वें प्रक्रम में भी सिद्ध हुआ है।

१७६। जिसके पृष्ठ का समीकरण $y^2 + z^2 = a^2$ है उस से यर धरातल से और जिन चारो धरातलों का क्रम से $y = y_1, y = y_2, r = r_1, r = r_2$ ये समीकरण हैं उन से बने हुए घनक्षेत्र का घनफल जानना है।

यहाँ १७४वें प्रक्रम की युक्ति से

$$\begin{aligned} घ = \frac{y_2}{y_1} \int_{r_1}^{r_2} \frac{y_1 r}{a} \text{ तार ताय} &= \frac{1}{2a} \int_{y_1}^{y_2} (r_2^2 - r_1^2) y \text{ ताय} \\ &= \frac{1}{8a} (r_2^2 - r_1^2) (y_2^2 - y_1^2) \\ &= \frac{1}{8a} (y_2 - y_1) (r_2 - r_1) \{ y_1 r_1 + y_2 r_2 + y_1 r_2 + y_2 r_1 \} \\ &= \frac{1}{8} (y_2 - y_1) (r_2 - r_1) (l_1 + l_2 + l_3 + l_4) \end{aligned}$$

जहाँ l_1, l_2, l_3, l_4 ये चारो कोनों के क्रम से शङ्कु हैं

यहाँ पर यह मान लिया गया है कि सीमाओं के भीतर सर्वत्र यर धन है ।

१७७। जिस धरातल का समीकरण $l = 0$, वृत्त का $(y-c)^2 + (r-j)^2 = g^2$ और घन के पृष्ठ का $y r = a l$ यह है उन से बने घनक्षेत्र का घनफल जानना है ।

यहाँ वृत्त के समीकरण से r की सीमा $j - \sqrt{g^2 - (y-c)^2}$ और $j + \sqrt{g^2 - (y-c)^2}$ ये होंगी इस लिये १७४वें प्रक्रम की युक्ति से

$$\begin{aligned} घ &= \int \int \frac{y r}{a} \text{ तार ताय} = \frac{1}{a} \int \int y r \text{ तार ताय} \\ &= \frac{2j}{a} \int y \sqrt{g^2 - (y-c)^2} \text{ ताय} \end{aligned}$$

जहाँ y की सीमा $c-g, c+g$, ये हैं

$$\begin{aligned} \text{और } \frac{2j}{a} \int y \sqrt{g^2 - (y-c)^2} \text{ ताय} &= \int (y-c) \sqrt{g^2 - (y-c)^2} \text{ ताय} \\ &+ c \int \sqrt{g^2 - (y-c)^2} \text{ ताय यदि } y-c = t \text{ तो ऊपर का घनफल} \\ &= \frac{2j}{a} \int t \sqrt{g^2 - t^2} \text{ तात} + c \int \sqrt{g^2 - t^2} \text{ तात} \end{aligned}$$

यहाँ t की सीमा $-g, +g$ है इस लिये सीमाओं के भीतर ऊपर के चल का मान निकालने से अभीष्ट घनफल $= \frac{j c g^2 \pi}{a}$,

यहाँ भी यह मान लिया गया है कि सीमाओं के भीतर यर धन है अर्थात् $(y-c)^2 + (r-j)^2 = g^2$ इस वृत्त का सब भाग प्रथम वा तृतीय पद में है ऐसा समझ कर तब ऊपर का घनफल निकाला गया है ।

१७८। यदि घनक्षेत्र को ऐसे धरातलों से काटें जिस में शङ्कु मूल के

अक्षीय समीकरण के वश श्रुताश्रुताप यह आधार का फल हो तो समखात का फल लश्रुताश्रुताप यह होगा इस लिये घ = \int लश्रुताश्रुताप । यहाँ $श्रु^2 = य^2 + र^2$

जैसे जिस धरातल का ल = ०, और दो पृष्ठों का $य^2 + र^2 = ४$ अ ल,

$र^2 = २$ गय— $य^2$ ये समीकरण हैं उन से बने घनक्षेत्र का फल जानना है तो यहाँ $\frac{श्रु^2}{४अ} = ल$ और श्रु, प की ऐसी सीमा होगी जिस में चल का फैलाव $र^2 = २$ गय - $य^2$ इस वृत्त के संपूर्ण फल तक हो तो यहाँ $श्रु^2 = २$ ग कोज्याप ऐसा मानने से अभीष्ट घनफल

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{श्रु^2} \frac{श्रु^2}{४अ} ताश्रु ताप = \frac{ग^४}{अ} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} कोज्या^४ पताप$$

$$= \frac{२ ग^४}{अ} \times \frac{३}{४} \times \frac{३}{४} \times \frac{\pi}{२} = \frac{३\pi ग^४}{८ अ} \text{ (खण्डचलानयन से)}$$

१७९। जिस पृष्ठ का ल = अ इ $\frac{य^2 + र^2}{ग^2} = अ इ - \frac{श्रु^2}{ग^2}$ यह समीकरण है उस से और यर अक्ष से बने घनक्षेत्र का घनफल जानना हो तो यहाँ पृष्ठ के समीकरण से स्पष्ट है कि मूल बिन्दु से चारो ओर अनन्त दूर तक पृष्ठ फैला हुआ है इस लिये य की सीमा ०, और २π होगी

और श्रु की ०, और ∞ होगी इस लिये घ = $\int \int$ अ इ $-\frac{श्रु^2}{ग^2}$ श्रुताश्रुताप

इस में \int इ $-\frac{श्रु^2}{ग^2}$ श्रुताश्रु इस का मान = $-\frac{इ-श्रु^2}{२ ग^2}$ यह होगा

इस लिये \int_0^{∞} इ $-\frac{श्रु^2}{ग^2}$ श्रुताश्रु = $\frac{ग^2}{२}$ और तब अभीष्ट घनफल का प्रमाण

$$= \int_0^{२\pi} \int_0^{\infty} \int \text{अ इ} - \frac{श्रु^2}{ग^2} श्रुताश्रुताप = अ \int_0^{२\pi} \frac{ग^2}{२} ताप = \frac{२\pi अ ग^2}{२} = \pi अ ग^2$$

१८०। १७४वें प्रक्रम में जो समखात का फल लतायतार यह निकाला है इसका ल अक्ष पर लम्ब जो धरातल है उन से अनन्त विभाग कर डालें तो एक

विभाग वा समखात घनफल की तात्कालिकी गति = ताल तार ताय यह होगी इस लिये घनक्षेत्र के घनफल का मान त्रिगुण चलानयन की रीति से

\iiint ताल तार ताय यह होगा।

१८१। जिस नलक का $y^2 + r^2 - 2ay = 0$ यह समीकरण है उसके यदि उस खण्ड का घनफल जानना चाहते हो जो कि $l = y$ स्पअ_१, $l = y$ स्पक_२ इन धरातलों से नलक के कटने से उत्पन्न हुआ है तो यहाँ नलक के समीकरण से $r^2 = 2ay - y^2 = r_1^2$, $r_1 = \sqrt{(2ay - y^2)}$

$$\begin{aligned} \text{अब १८० प्रक्रम की युक्ति से घ} &= \int_0^{2a} \int_{-r_1}^{r_1} \int_{y \text{ स्प क}_2}^{y \text{ स्प अ}_1} \text{तालतारताय} \\ &= \int_0^{2a} \int_{-r_1}^{r_1} (y \text{ स्प क}_2 - y \text{ स्प अ}_2) \text{तार ताय} \\ &= \int_0^{2a} (\text{स्प क}_2 - \text{स्प अ}_2) 2y \sqrt{(2ay - y^2)} \text{ताय} \\ &= 2(\text{स्प क}_2 - \text{स्प अ}_2) \frac{\pi a^3}{2} \end{aligned}$$

१८२। १७८वें प्रक्रम में समखात का आधार जिस का फल, श्रुता श्रुताष यह है उसे मान लो कि यर के धरातल में है अब इस आधार को स्थिररेखा अर्थात् य अक्ष के चारो ओर घुमावो तो स्पष्ट है कि इस आधार के घूमने से एक घनवलय होगा जिसका घनफल = 2π श्रुताश्रुताष = 2π श्रुज्याष श्रुताश्रुताष यह होगा और पूरा फेरा करने में आधार का धरातल यर धरातल से 2π कोण उत्पन्न करेगा इस लिये दडुत पास पास के दो स्थानों में आधार के धरातल के आने में यर धरातल से उत्पन्न कोण का मान क्रम से $\phi_1, \phi_2 + \text{ताष}_2$ मानो तो घनवलय के घनफल का परमालप विभाग वा तात्कालिकी गति

= ताष_१ श्रुज्यायश्रुताश्रुताय = श्रुज्याषताश्रुताषताष_२ इस लिये उचित सीमाओं के वश से सम्पूर्ण घनक्षेत्र का घनफल घ = \iiint श्रुज्याष ताश्रुताषताष_२

जैसे जिस गोल का व्यासार्द्ध अ है उसके अष्टमांश का घनफल जानना है तो पहले $\int \text{श्रु}^2 \text{ताश्रु} = \frac{\text{श्रु}^3}{3}$ इस में ०, और अ के बीच श्रु के मान

$$\text{में चल} = \frac{a^3}{3}$$

$$\text{तब } \phi = \int \int \frac{a^3}{3} \text{ ज्यापतापताप,}$$

इस तरह से पहले r के वश चल ले आने से श्रुंज्याप श्रु प प, इन सब अवयवों का योग जो कि एक सूची के (जिसके आधार का फल = अंज्याष ष ष_२ और वे = अ) समान है आया ।

फिर ϕ के वश चल ज्ञान करने से

$$\int \text{ज्याष ताप} = - \text{कोज्याप,}$$

यहाँ ϕ की सीमा ० और $\frac{\pi}{2}$ मानने से

$$\phi = \int \frac{a^3}{3} \text{ ताप,}$$

इस तरह यहाँ ϕ के वश चलानयन से $\frac{a^3}{3}$ ज्याप $\Delta \phi \Delta \phi$, इस चाल को ϕ और $\phi + \phi$ के भीतर जितनी सूचियाँ हैं उनका योग आया ।

फिर सब के पीछे ϕ के वश से चल ज्ञान करने से और ϕ की सीमा ० और $\frac{\pi}{2}$ मानने से गोल के अष्टमांश घनफल का मान = $\phi = \frac{\pi a^3}{6}$

१८३। एक समसूच्याकार शङ्कु का शिरःस्थान एक गोल के पृष्ठ पर है और शिरःस्थान से गोलगर्भ तक जो रेखा गई है वही शङ्कु का अक्ष है । गोल का व्यासार्द्ध a और शङ्कु का शिरःकोणार्द्ध a_1 है तो शङ्कु के आधार के गोल के पृष्ठ में लगने से शङ्कु पृष्ठ और गोल पृष्ठ के भीतर जो घनक्षेत्र होगा उसका घनफल जानना हो तो शङ्कु के शिरःस्थान को मूलविन्दु मानने से गोल-पृष्ठ का अक्षीयसमीकरण

$\phi = 2\text{अकोज्याष}$ यह होगा । इस लिये अभीष्ट

$$\text{घनफल} = \int_0^{2\pi} \int_0^{a_1} \int_0^{2\text{अकोज्याष}} \text{श्रुंज्याषताश्रुताषताष,}$$

१८४। इसी प्रकार $\phi = \text{अ}(1 + \text{कोज्याष})$ इस वक्र के स्थिर रेखा के चारो ओर घूमने से जो घनक्षेत्र होगा उसका घनफल ।

$$\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\text{अ}(1 + \text{कोज्याष})} \text{श्रुंज्याषताश्रुताषताष,}$$

$$= \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} a(1 + \cos \alpha) \sin^2 \alpha \sin \beta \sin \gamma \, d\alpha \, d\beta \, d\gamma \quad (\text{६३वें प्रक्रम से})$$

$$= \frac{2\pi a^3}{3} \int_0^{\pi} (1 + \cos \alpha)^3 \sin^2 \alpha \, d\alpha \quad \text{इसका मान १२वें प्रक्रम के १५वें}$$

उदाहरण से वा खण्डचलानयन से $\frac{\pi a^3}{3}$ यह होगा ।

१८५। जिन दो घनक्षेत्रों के पृष्ठ का समीकरण (१) फ $(\frac{y}{a}, \frac{r}{k}, \frac{l}{g}) = 0$

(२) फ(y, r, l) = 0 ये हों तो यदि

$$\frac{y}{a} = \frac{y}{a}, \frac{r}{k} = \frac{r}{k}, \frac{l}{g} = \frac{l}{g} \text{ तो}$$

$$\text{लतायतार} = \text{अकग ल ताय तार}$$

इस लिये १७४वें प्रक्रम से

$$(१) \text{ का घ} = \iint \text{लतायतार} = \iint \text{अकगलतायतार} = \text{अकग} \times (२) \text{ का घ।}$$

जैसे दैर्घवृत्तीय घनक्षेत्र के पृष्ठ का समीकरण $\frac{a^2 y^2}{a^2} + \frac{a^2 r^2}{k^2} + \frac{a^2 l^2}{g^2} - a^2 = 0$

और गोल का $y^2 + r^2 + l^2 - a^2 = 0$ यह है इस लिये

$$\text{दैर्घवृत्तीय घनक्षेत्र का घनफल} = \frac{\text{अकग} \times}{\text{अअअ}} \text{ गोल का घनफल}$$

$$= \frac{4\pi a^3 \times \text{अकग}}{3 \times a^3} = \frac{4\pi \text{अकग}}{3} \text{ यही १६५वें प्रक्रम में भी सिद्ध हुआ है।}$$

इस प्रकार से ऊपर कहे हुए सिद्धान्तों से सैकड़ों नये सिद्धान्त उत्पन्न होते हैं जिन के बल से बड़े बड़े कठिन प्रश्नों का उत्तर सहज में निकल सकता है । विद्यार्थियों को चाहिये कि जिस प्रश्न में जिस सिद्धान्त से सहज में उत्तर निकालने की आशा पाई जाय उसका उत्तर बड़ी सावधानी से उसी सिद्धान्त से निकालें । उत्तर निकालने में सीमाओं का विचार बड़ी सावधानी से करना चाहिये क्योंकि सीमा ही से तो क्षेत्र बँधा है और जब सीमा ही बिगड़ गई तो क्षेत्र ही दूसरा हो गया इस लिये जिस का फल अपेक्षित है उस का फल सीमाओं के बिगड़ जाने से कथमपि न निकलेगा । जहाँ कहीं सीमाओं में संशय जान पड़े वहाँ वक्र क्षेत्र की आकृति बनाकर सीमाओं का ज्ञान कर लो ।

अभ्यास के लिये प्रश्न ।

१। जिस वक्र का $y = a^x$ यह समीकरण है उसके चाप के y अक्ष के चारों ओर घूमने से जो घनक्षेत्र होगा उसका क्या पृष्ठफल होगा ।

२। $r = \frac{ky}{a}$ यह वक्र y अक्ष के चारों ओर घूमकर जो घनक्षेत्र बनाता है उसका पृष्ठफल क्या होगा ।

३। चक्रालद यदि शिरःस्थानगतस्पर्शरेखा के चारों ओर घूमकर घनक्षेत्र बनावे तो उसका सम्पूर्ण पृष्ठफल क्या होगा ।

$$उ० \frac{३२\pi k^2}{३}$$

४। यदि चक्रालद अपने आधार के चारों ओर घूमकर घनक्षेत्र बनावे तो उसका सम्पूर्ण पृष्ठफल क्या होगा ।

$$उ० \frac{६४\pi k^2}{३}$$

५। त्रीतर (Tractory) y अक्ष के चारों ओर घूमकर जो घनक्षेत्र बनाता है उसका सम्पूर्ण पृष्ठफल बतावो (९१वाँ प्रक्रम देखो) उ० $४\pi a^2$

६। एक गोल को दो तुल्य समतलपरिधि रूप शङ्कु से (जो कि गर्भक्षितिज पर लम्ब है और जिन के आधार वृत्त का व्यास गोल के व्यासार्द्ध तुल्य हैं और जिन के अक्ष गोल के उन व्यासार्द्धों का सम द्विभाग करते हैं जिनके योग से गर्भक्षितिज का व्यास बनता है) आर पार छेद डाला तो अवशिष्ट गोल के भाग का पृष्ठफल क्या होगा ।

उ० अवशिष्ट भाग का पृष्ठफल गोल व्यास के वर्ग का दूना होगा (१५२ प्रक्रम का (१) उदाहरण देखो । सीमा का विचार अच्छी तरह से करलो)

७। जिस वक्र का $r = a \pm a \cos \frac{y}{a}$ यह समीकरण है वह यदि y अक्ष के चारों ओर घूमकर घनक्षेत्र बनावे तो $y = a$, $y = -a$ के भीतर के खण्ड का क्या पृष्ठफल होगा ।

$$उ० ४\pi a^2 \left\{ \sqrt{(1+k^2)} - \sqrt{2} + \frac{ka(1+\sqrt{2})}{1+\sqrt{(1+k^2)}} \right\}$$

८। जिस वक्र के समीकरण पर से $r^2 \sin \theta = -(a^2 - r^2)^{3/2}$ रतार ऐसा सिद्ध हो y अक्ष के चारों ओर उसके घूमने से जो घनक्षेत्र होगा उस का सम्पूर्ण पृष्ठफल क्या होगा । उ० $२\pi a^2$ ।

१। एक गोल को एक समतलमस्तकपरिधि रूप शङ्कु से छेद डाला तो छेदित प्रदेश का क्या पृष्ठफल होगा । इस प्रश्न में इतना जानते हैं कि गोल की परिधि से शङ्कु की आधार परिधि आधी है और शङ्कु का एक पृष्ठसूत्र गोलगर्भ में होकर जाता है ।

उत्तर, यदि गोल का व्यासार्द्ध = अ तो अभीष्ट पृष्ठफल = $2\pi a^2 - 8a^2$ ।

१०। एक गोल जिसका व्यासार्द्ध १५ हाथ है उन दो समानान्तर धरातलों से काटा गया केन्द्र से जिनका अन्तर क्रम से ३, ७ हाथ हैं तो धरातलों के बीच में जो गोलखण्ड है उसका पृष्ठफल क्या होगा ।

उ० ३७६.९९०८ वर्ग हस्त ।

११। पृथ्वी के पृष्ठ से कितनी ऊँचाई पर पृथ्वी के पृष्ठभाग की तिहाई देख पड़ेगी ।

उ० पृथ्वी के व्यास के समान ऊँचाई पर ।

१२। एक समसूच्याकार शङ्कु के भीतर एक गोल बना हुआ है गोल का व्यासार्द्ध त्रि और गोल के केन्द्र और शङ्कुग्र का अन्तर (अ) है तो शङ्कु और गोल के पृष्ठफलों में क्या सम्बन्ध होगा । उ० $s = \frac{a^2 - t^2}{8at}$

१३। अ, क गोल के व्यासार्द्ध क्रम से ३ और ४ हाथ हैं इन के पृष्ठफल के योग के समान ग गोल का पृष्ठफल है तो बतावो कि ग गोल का क्या व्यासार्द्ध होगा ।

उ० ५ हाथ

१४। यदि एक त्रिभुज जो कि य अक्ष के एकही ओर है य अक्ष के चारो ओर घूमने से घनक्षेत्र बनावे तो उसका पृष्ठफल कैसे निकालोगे । हर एक भुज को बढ़ाकर य अक्ष से मिला दो तो त्रिभुज के घूमने से वर्धित भुज भी घूमकर समसूची बनावेंगे फिर इन सूचियों के पृष्ठसूत्रों की सीमा तीनों भुज क्रम से कल्पना कर सूची खण्ड के पृष्ठफलों के योग से अभीष्ट पृष्ठफल जानलो ।

१५। दो समानान्तर धरातलों के काटने से एक गोल खण्ड ऐसा उत्पन्न हुआ कि उसके मुखपरिधि का व्यासार्द्ध (अ) आधार परिधि का व्यासार्द्ध (क) और गोलखण्ड की ऊँचाई (उ) ठीक ठहरी तो उस गोलखण्ड का समग्र पृष्ठफल क्या होगा ।

$$उ० \left[\pi \left\{ 2उ \sqrt{a^2 + \left\{ \frac{k^2 - a^2 + उ^2}{2उ} \right\}^2} + k^2 + a^2 \right\} \right]$$

१६। $r = a^2(k + y)$ यह वक्र य अक्ष के चारो ओर घूमकर जो घनक्षेत्र बनाता है उसका घनफल सिद्ध करो कि

$$\frac{\pi a^2(k + y)^3}{6} + \text{स्थि यह होगा}$$

१७। य अक्ष के चारो ओर घूमकर यदि $r^2(y - ak) = a_2y(y - gk)$ यह वक्र घनक्षेत्र बनावे तो सिद्ध करो कि

$$g_2 - g_1 = \pi a_2 \left\{ \frac{y_2^2 - y_1^2}{2} + k(a - g)(y_2 - y_1) + ak^2(a - g) \frac{y_2 - ak}{y_2 - ak} \right\}$$

१८। य अक्ष के चारो ओर घूमकर यदि $r^2 = \frac{ay(y - 3a)}{y - 4a}$ यह अक्ष घनक्षेत्र बनावे तो ० और $3a$, y के मान में क्या घनफल होगा ।

$$उ० \frac{\pi a^3}{2} (15 - 16 \text{ ला } 2)$$

१९। शिरः स्थानगत स्पर्शरेखा के चारो ओर घूमकर चक्रालद जो घनक्षेत्र बनाता है उसका क्या घनफल होगा उ० $\pi^2 a^3$ ।

२०। यदि आधार के चारो ओर चक्रालद घूमे तो क्या घनफल होगा ।

$$उ० 4\pi a^3$$

२१। अपने असीमपथ के चारो ओर घूमने से जो घनक्षेत्र

$$r^2 = \frac{y^2}{2a - y} \text{ यह वक्र बनाता है उसका घनफल क्या होगा । उ० } 2\pi^2 a^3$$

२२। अपने असीमपथ के चारो ओर घूमने से जो घनक्षेत्र

$$r^2 = \frac{4a^2(2a - y)}{y} \text{ यह वक्र बनाता है उसका घनफल क्या होगा ।}$$

$$उ० 8\pi^2 a^3$$

२३। जिस वक्र का $(r - k)^2 = 16a^2y$ यह समीकरण है वह r अक्ष के चारो ओर घूमकर जो घनक्षेत्र बनाता है उस में चारो ओर से घिरा हुआ जो भाग है उस का घनफल क्या होगा ।

$$उ० \frac{\pi k^3}{315a^2}$$

२४। जिस गोलखण्ड में मुखव्यासार्द्ध (r_1) आधार व्यासार्द्ध (r_2) ऊँचाई (वे) उसका घनफल क्या होगा । उ० $\frac{\pi वे}{6} \left\{ वे^2 + 3(r_1^2 + r_2^2) \right\}$

२४। जिस वक्र का $r^2 = 2my + ny^2$ यह समीकरण है वह यदि y अक्ष के चारो ओर घूमकर घनक्षेत्र बनावे तो सिद्ध करो कि

$$घ_2 - घ_1 = \frac{\pi(y_2 - y_1)}{2} \left\{ r_2^2 + r_1^2 - \frac{1}{3}(y_2 - y_1)^2 \right\}$$

२५। एक समसूची (जिस का शिरःकोण 60° है) के भीतर एक गोल है जो कि सूची के आधार और पृष्ठसूत्रों को स्पर्श करता है । यदि गोल का व्यासार्द्ध (त्रि) हो तो गोल और सूची से बने घनक्षेत्र का क्या घनफल होगा ।

$$\text{उ० } \frac{\pi \text{ त्रि}^3}{6}$$

२६। य अक्ष के चारो ओर घूमने से जो घनक्षेत्र $\text{श्रु}^3 = \text{अ}^2(\text{य}^2 - \text{र}^2)$ यह वक्र बनाता है उस का क्या घनफल होगा ।

$$\text{उ० } \frac{\pi \text{ अ}^3}{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ला} (1 + \sqrt{2}) - \frac{1}{3} \right\}$$

२७। जिस वक्र में $\text{श्रु}^3 = \text{अ}^2\text{य}^2 + \text{क}^2\text{र}^2$ हैं वह य अक्ष के चारो ओर घूमकर जो घनक्षेत्र बनाता है उस का घनफल निकालो ।

इस में अ 7 क समझो ।

$$\text{उ० } \frac{\pi}{6} (2\text{अ}^2 + 3\text{क}^2)\text{अ} + \frac{\pi \text{ क}^3}{2\sqrt{\text{अ}^2 - \text{क}^2}} \text{ला } \frac{\text{अ} + \sqrt{\text{अ}^2 - \text{क}^2}}{\text{क}}$$

२८। २७ वें प्रश्न में यदि $\text{अ} = \text{क}$ तो घनक्षेत्र का क्या फल होगा ।

$$\text{उ० } \frac{4 \pi \text{ अ}^3}{3}$$

२९। २७ वें प्रश्न का वक्र यदि र अक्ष के चारो ओर घूमे तो घनक्षेत्र का क्या घनफल होगा ।

$$\text{उ० } \frac{\pi}{6} (2\text{क}^2 + 3\text{अ}^2)\text{क} + \frac{\pi \text{ अ}^3}{2\sqrt{\text{अ}^2 - \text{क}^2}} \text{ज्या}^{-1} \frac{\sqrt{\text{अ}^2 - \text{क}^2}}{\text{अ}}$$

३०। जिस के पृष्ठ का $\frac{\text{य}^2}{\text{अ}^2} + \frac{\text{र}^2}{\text{क}^2} + \frac{\text{ल}^2}{\text{ग}^2} = 1$ यह समीकरण है उसका सम्पूर्ण घनफल क्या होगा ।

$$\text{उ० } \frac{4 \pi \text{ अकग}}{3}$$

३१। जिसके पृष्ठ का $\frac{\text{य}^2}{\text{अ}^2} + \frac{\text{र}^2}{\text{क}^2} = 2$ ल यह समीकरण है उसे यदि यर धरातल के समानान्तर धरातल (जिसमें $\text{ल} = \text{ग}$) से काटें तो कटे खण्ड का क्या घनफल होगा ।

$$\text{उ० } \pi \text{ अ क ग}^2$$

३२। जिस के पृष्ठ का $\frac{\text{य}^2}{\text{अ}^2} + \frac{\text{र}^2}{\text{क}^2} = \frac{2\text{ल}}{\text{ग}} - \frac{\text{ल}^2}{\text{ग}^2}$ यह समीकरण है उसे

यदि $य$ र धरातल के समानान्तर धरातल (जिसमें $ल = च$) से काटें तो कटे खण्ड का क्या घनफल होगा ।

$$उ० = अ क \left\{ \frac{च^२}{ग} - \frac{च^३}{३ग^२} \right\}$$

३३। जिसके पृष्ठ का $\left(\frac{य}{अ}\right)^३ + \left(\frac{र}{क}\right)^३ + \left(\frac{ल}{ग}\right)^३ = १$ यह समीकरण है

उसका प्रथम पद में जो खण्ड है उसका क्या घनफल होगा । उ० $\frac{अकग}{९०}$

३४। जिस के पृष्ठ का $\left(\frac{य}{अ}\right)^३ + \left(\frac{र}{क}\right)^३ + \left(\frac{ल}{ग}\right)^३ = १$ यह समीकरण है

उसका सम्पूर्ण घनफल क्या होगा । उ० $\frac{४ अ क ग}{३५}$

३५। जिसके पृष्ठ का $(य^२ + र^२ + ल^२)^३ = २७अ^३यल$ यह समीकरण है

उसका सम्पूर्ण घनफल क्या होगा । उ० $\frac{९अ^३}{२}$

(१८२ प्रक्रम देखो और श्रु का परमाधिक मन्त समीकरण को अक्षीय समीकरण में बदल $\frac{३अ}{२\sqrt{२}}$ यह जान लो)

३६। जिस त्रिभुज के तीनों भुज क्रम से अ, क, ग हैं वह यदि ग भुज के चारो ओर घूमकर एक घनक्षेत्र बनावे तो उसका क्या घनफल होगा ।

$$\text{यदि स} = \frac{अ+क+ग}{२} \text{ तो घनफल} = \frac{४\pi}{३} \cdot \frac{स(स-अ)(स-क)(स-ग)}{ग}$$

३७। जिसके पृष्ठ का $ल^n = अय^३ + कर^३$ यह समीकरण है उसे यदि $य$ र धरातल के समानान्तर धरातल से काटें (जिस धरातल में $ल = ल_१$) तो कटे खण्ड का क्या घनफल होगा । उ० $\frac{गल_१^{n+१}}{(न+१)\sqrt{अक}}$

३८। जिस वृत्त का व्यासार्द्ध अ है उस में एक पूर्णज्या केन्द्र से ग दूरी पर है इस के ऊपर का चाप इस पूर्णज्या के चारो ओर घूमकर यदि घनक्षेत्र बनावे तो उसका क्या घनफल होगा । चाप को समझो कि परिधि के आवे से छोटा है और कोज्या $प_१ = \frac{ग}{अ}$ । $प_१$ = कोण का चापीयमान ।

$$उ० \quad \text{अभीष्ट घनफल} = २\pi अ \left\{ \frac{(२अ^२ + ग^२)ज्याप_१}{३} - गप_१ \right\}$$

३९। य अक्ष पर जो पूर्णज्या (ग) लम्ब है उसके चारो ओर घूमकर यदि परवलय का चाप घनक्षेत्र बनावे तो उसका क्या घनफल होगा ।

उ० यदि पूर्णज्या के आधे पर जो लम्ब खड़ा हो वह जहाँ परवलय के चाप में लगे उसका मान पूर्णज्यार्द्ध विन्दु से क मानो तो घनफल = $\frac{2^{\pi} क^२ ग}{१५}$

४० एक गोल जिसका व्यासार्द्ध (अ) है एक धरातल से जो गोल गर्भ से दूरी पर है काटा गया है । काटने से जो गोल में एक वृत्त बना उसे आधार मान दो समसूची बनाया जिसके वैध क्रम से, अ+द, अ-द हैं तो दोनों के घनफलों का क्या अन्तर होगा ।

$$उ० \frac{३\pi d^2}{8}(अ^३-द^३)$$

४१। एक परवलय के य अक्ष पर केन्द्र कल्पना कर एक वृत्त बनाया तो यह वृत्त परवलय की एक शाखा में दो जगह जहाँ पर लगा उनके कोटियों का लम्ब रूपी अन्तर क ठहरा और यह वृत्त य अक्ष को दो जगह जहाँ काटा वे दोनों विन्दु परवलय के भीतर हैं । अब यदि परवलय और वृत्त दोनों साथही य अक्ष के चारो ओर घूमें तो परवलय और वृत्त के सम्पातान्तर्गत परवलय चाप, और वृत्तचाप के वश से एक घनक्षेत्र होगा । बतावो इसके घनफल का क्या मान होगा ।

$$उ० \frac{\pi क^३}{६}$$

४२। जिस गोल का व्यासार्द्ध (अ) है उसे गोल गर्भ से (ग) अन्तर पर जो धरातल है उससे काट डाला । काटने से जो गोलार्द्ध से अल्प खण्ड है उसका क्या घनफल होगा ।

$$उ० \frac{\pi}{३}(अ-ग)^३(२अ+ग)$$

४३। परवलय का $र^२ = ४ अ$ य यह समीकरण है । य अक्ष में केन्द्र कल्पना कर परवलय के विन्दु का भु = ३ अ है उसे स्पर्श करते हुए एक वृत्तार्द्ध बनाया जिसके केन्द्र का अन्तर परवलय के शिरःस्थान से (४ अ) दूरी पर भुज की ओर है । यदि परवलय और वृत्तार्द्ध दोनों साथही य अक्ष के चारो ओर घूम कर घनक्षेत्र बनावें तो गोलपृष्ठ और परवलय सम्बन्धी पृष्ठ के भीतर का क्या घनफल होगा ।

$$उ० \frac{१४}{३} अ^{३\pi}$$

४४। लघुव्यासाग्र पर जो दीर्घवृत्त में स्पर्शरेखा है दीर्घवृत्त के परिधि का चतुर्थांश उसके चारो ओर घूमकर जो घनक्षेत्र बनाता है उसका क्या घनफल होगा ।

$$उ० \frac{\pi अ क^३}{६}(१०-३^{\pi})$$

(जहाँ लघुव्यासार्द्ध = क, वृहद्व्यासार्द्ध = अ)

४५। एक गोले के नीचे ऊपर छेद कर उसके भीतर एक चाँगे को रख दिया तो यह चाँगा उसके भीतर चौचक बैठ गया यदि चाँगे की ऊँचाई (ग) हो तो चाँगे के पृष्ठ और गोल के पृष्ठ के भीतर जो घनक्षेत्र होगा उसका क्या घन-फल होगा ।

$$उ० \quad \frac{\pi g^3}{6}$$

४६। किसी घनक्षेत्र में पृष्ठ के प विन्दु का मूल विन्दु से अन्तर श्रु हो और प विन्दुगत स्पर्शधरातल पर मूलविन्दु से लम्ब = श्रुकोज्याप और पृष्ठफल की तात्कालिकी गति = तापू तो सिद्ध करो कि

$$घ = \frac{1}{3} \int \text{श्रुकोज्यापतापू}$$

४७। जिस सूची के खण्ड में मुख परिधि का व्यासार्द्ध (त्रि_१) आधार-परिधि का व्यासार्द्ध (त्रि_२) और ऊँचाई (वे) है उस का घनफल क्या होगा ।

$$उ० \quad \frac{\pi \text{वे}}{3} (\text{त्रि}_1^2 + \text{त्रि}_1 \text{त्रि}_2 + \text{त्रि}_2^2)$$

४८। समसूचियों का पृष्ठसूत्र (ग) स्थिर है । जिसका सब से अधिक घन-फल है उसके शिरःकोण का क्या प्रमाण होगा । उ० कोज्या^{-२} $\frac{1}{\sqrt{3}}$

४९। एक समतलमस्तकपरिधिरूप शङ्कु के एक पृष्ठसूत्र को अक्ष मान एक समसूच्याकार शङ्कु बनाया । यदि दोनों शङ्कुओं का आधार (अ) और वेध (अ × उ) हो तो पहले शङ्कु से सूची के जो दो खण्ड होंगे उनके पृष्ठफल और घनफल क्या होंगे ।

उ० क्रम से खण्डों के

$$\text{पृष्ठफल, } \frac{8\pi \sqrt{(1+3^3)} - 3\sqrt{(3+3^3)}}{6} \text{अ}^2, \frac{2\pi \sqrt{(1+3^3)} + 3\sqrt{(3+3^3)}}{6} \text{अ}^2$$

$$\text{और घनफल } \frac{8\pi + 29\sqrt{3} - 68}{12} \text{इअ}^3, \frac{68 - 29\sqrt{3} - 2\pi}{12} \text{इअ}^3,$$

५०। जिसके पृष्ठ का $l^2 + \frac{a^2 r^2}{y^2} - g^2 = 0$ यह समीकरण है उसे उन

दो धरातलों से जिन में $y = 0$, $y = a$ है काटा तो दो धरातलों के अन्तर्गत खण्ड का क्या घनफल होगा ।

$$उ० \quad \frac{\pi a g^2}{2}$$

५१। $y^2 + r^2 = गल$, $y^2 + r^2 = अय$, और $ल = ०$ इन तीनों पृष्ठों के अन्तर्गत घनक्षेत्र का क्या घनफल होगा । उ० $\frac{३\pi अ^५}{३२}$

(१७८वाँ प्रक्रम देखो)

५२। जिस पृष्ठ का $\frac{y^2}{अ^५} + \frac{r^2}{क^५} + \frac{ल^2}{ग^५} = १$ यह समीकरण है उसका सम्पूर्ण घनफल क्या होगा । उ० $\frac{४\pi अ^५क^५ग^५}{३}$

(१८५वाँ प्रक्रम देखो)

५३। एक पुजारी ने ठाकुर जी के सामने जलती धूपवत्ती खोंसने के लिये मट्टी की एक समसूची बना रक्खी थी । एक दिन एक धनी ठाकुर जी के दर्शन के लिये आया और चलती वैर उस समसूची के शिरे से आधार तक एक सूत से नापकर कहा कि देखो यह १० अङ्गुल का सूत हुआ इसे मैं याद रखने के लिये जेब में रख लेता हूँ तुम इस सूची को खूब खोखली कर किसी दिन मेरी कोठी में आवो तो मैं उसे सोने से भर दूँगा । प्रातःकाल पुजारी ने एक ज्यौतिषी से आकर निवेदन किया कि महाराज आप एक मट्टी की खोखली समसूची ऐसी बना दीजिये जिसके शिरे से आधार तक सर्वत्र दश अङ्गुल रहे और भीतर सोना भरने के लिये जगह भी खूब खुलासा रहे । ज्यौतिषी ने गणित द्वारा उसके आधार परिधि का मान निकाल पुजारी को बता दिया कि इसी परिधि पर दश अङ्गुल पृष्ठ सूत्र से किसी कोहार के द्वारा समसूची को बनालो । बतावो ज्यौतिषी ने आधार परिधि का क्या मान बतलाया था । उ० यदि व्यास परिधि का सम्बन्ध $\frac{३}{८}$ हो तो आधार परिधि = $\frac{५४}{८}\sqrt{\frac{३००}{८}} = ५१.२९$

इति अष्टमाध्याय ।

अथ नवमाध्याय ।

सान्तचलानयन ।

१८६। जिस तात्कालिक सन्बन्ध का साधारण रीति से अनन्त चल का ज्ञान हो जाता है उस में दोनों सीमाओं का उत्पादन देने से उस के सान्तचल का भी ज्ञान हो जाता है। इस लिये सान्तचल का मूल अनन्तचल ही ठहरा तथापि बहुत से स्थानों में अनन्तचल का रूप बिना बनाये लाग्रव से सान्तचल का मान आ जाता है जैसा कि ५७वें प्रक्रम में कुछ उदाहरण दिखा आये हैं और बहुत से स्थानों में जहाँ अनन्तचल का मान ठीक ठीक नहीं जान सकते वहाँ भी इस सान्तचल के नियम से अनेक चमत्कृत सिद्धान्त उत्पन्न होते हैं इस लिये इस अध्याय में कुछ सान्तचलानयन के प्रकार लिखे जाते हैं ।

आज तक जितने सान्तचलों का ज्ञान हुआ है D. Bierens de Haan ने सब को एकट्ठा कर के सान्तचलसारणी Tables d' Integrales Definies के नाम से छपवा दिया है। जिन को इच्छा हो उसे देखें हम यहाँ पर कुछ रीतियों को दिखलाते हैं ।

१८७। \int_0^{π} ज्या मय ज्यानय ताय इस का मान जानना चाहते हैं। जहाँ

म, न अभिन्न धनात्मक संख्या है और $m \neq n$ ।

$$\text{यहाँ ज्यामय ज्यानय} = \frac{\text{कोज्या (म-न) य-कोज्या (म+n) य}}{2}$$

$$\text{इस लिये } \int \text{ज्यामय ज्यानय} = \frac{\text{ज्या (म-न)य}}{2(म-न)} - \frac{\text{ज्या (म+n)य}}{2(म+n)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{और } \int_0^{\pi} \text{ज्यामय ज्यानय ताय} = 0 \\ \text{इसी प्रकार } \int_0^{\pi} \text{कोज्यामय कोज्यानय ताय} = 0 \end{array} \right\} \dots \dots (१)$$

यदि $m = n$ और अभिन्न धनात्मक तो

$$\int \text{ज्यामय ज्यानय ताय} = \int \text{ज्यानय ताय} = \int \frac{(१-\text{कोज्या } २ \text{ नय})}{2} \text{ताय}$$

$$= \frac{y}{2} - \frac{\text{ज्या}^2 \text{नय}}{4n} ।$$

$$\therefore \int_0^{\pi} \text{ज्या}^2 \text{नय} = \frac{\pi}{2}, \text{ इसी तरह } \int_0^{\pi} \text{कोज्या}^2 \text{नय} = \frac{\pi}{2} ।$$

१८८। $\int_0^{\pi} \text{ज्या}^m \text{य कोज्या}^n \text{य ताय}$ इस का मान जानना है। जहाँ m और

n अभिन्न धनात्मक संख्या हैं।

यहाँ ३५ वें प्रक्रम से

$$\int \text{ज्या}^m \text{य कोज्या}^n \text{य ताय} = \frac{\text{कोज्या}^{n-2} \text{य ज्या}^{m+2} \text{य}}{m+n} \\ + \frac{n-1}{m+n} \int \text{ज्या}^m \text{य कोज्या}^{n-2} \text{य ताय}$$

$$\text{वा } \int \text{ज्या}^m \text{य कोज्या}^n \text{य ताय} = \frac{m-1}{m+n} \int \text{ज्या}^{m-2} \text{य कोज्या}^n \text{य ताय} \\ - \frac{\text{ज्या}^{m-1} \text{य कोज्या}^{n+1} \text{य}}{m+n}$$

इस लिये दोनों पर से

$$\int_0^{\pi} \text{ज्या}^m \text{य कोज्या}^n \text{य ताय} = \frac{n-1}{m+n} \int_0^{\pi} \text{ज्या}^m \text{य कोज्या}^{n-2} \text{य ताय}$$

$$\int_0^{\pi} \text{ज्या}^m \text{य कोज्या}^n \text{य ताय} = \frac{m-1}{m+n} \int_0^{\pi} \text{ज्या}^{m-2} \text{य कोज्या}^n \text{य ताय} ।$$

इस लिये m और n में से कोई विषम हो तो सहज में सान्तचल विदित होगा m के स्थान में $2m+1$ का उत्थापन देने से

$$\int_0^{\pi} \text{ज्या}^{2m+1} \text{य कोज्या}^n \text{य ताय} = \frac{2m}{2m+n+1} \int_0^{\pi} \text{ज्या}^{2m-1} \text{य कोज्या}^n \text{य ताय}$$

इस लिये बार बार क्रिया करने से

$$\int_0^{\pi} \text{ज्या}^{2m+1} \text{य कोज्या}^n \text{य ताय} \\ = \frac{2m(2m-2)(2m-4)\dots 2}{(2m+n+1)(2m+n-1)\dots(n+3)} \int_0^{\pi} \text{ज्या}^1 \text{य कोज्या}^n \text{य ताय}$$

परन्तु \int ज्या य कोज्याⁿयताय

$$= - \frac{\text{कोज्या}^{n+1}\text{य}}{n+1} \therefore \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \text{ज्याय कोज्या}^{n}\text{य ताय} = \frac{1}{n+1}$$

इस लिये

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{2} \text{ज्या}^{2m+2}\text{य कोज्या}^{2n}\text{य ताय} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2m}{(n+1)(n+3) \dots (2m+n+1)} \dots \dots (2)$$

इसी प्रकार न यदि विषम हो तो न के स्थान में २n+१ का उत्थापन देने से

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \text{ज्या}^{2m}\text{य कोज्या}^{2n+2}\text{य ताय} &= \frac{2n}{m+2n+1} \int_0^{\pi} \text{ज्या}^{2m}\text{य कोज्या}^{2n-2}\text{य ताय} \\ &= \frac{2n(2n-2) \dots 2}{(m+2n+1)(m+2n-1) \dots (m+3)} \int_0^{\pi} \text{ज्या}^{2m}\text{य कोज्या}^2\text{य ताय} \\ &= \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}{(m+1)(m+3) \dots (m+2n+1)} \dots \dots (3) \end{aligned}$$

इसी तरह

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \text{ज्या}^{2m}\text{य कोज्या}^{2n}\text{यताय} &= \frac{2n-1}{2(m+n)} \int_0^{\pi} \text{ज्या}^{2m}\text{य कोज्या}^{2n-2}\text{य ताय} \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{(2m+2)(2m+4) \dots (2m+2n)} \int_0^{\pi} \text{ज्या}^{2m}\text{य ताय} \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2) \dots (2m-2n)} \cdot \frac{\pi}{2} \dots \dots (4) \end{aligned}$$

वहुत सान्तचलों का रूप ऊपर के आकार में ला सकते हैं ।

जैसे यदि य = स्पय

$$\text{तो } \int_0^{\infty} \frac{\text{ताय}}{(1+y^2)^n} = \int_0^{\pi} \text{कोज्या}^{2n-2}\text{य ताय} = \int_0^{\pi} \text{ज्या}^{2n-2}\text{य ताय}$$

(४१) प्रक्रम के (४) समीकरण से)

$$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2)} \frac{\pi}{2} \text{ (१२ वें प्रक्रम के (१५) उदाहरण से)}$$

इसी तरह य = अ ज्याप मानने से

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{अयन}(\text{अ}^2 - \text{य}^2)^m}{2} \text{ताय} = \text{अ}^{2m+1} \int_0^{\pi} \text{ज्या}^{2m}\text{य कोज्या}^{2m+2}\text{य ताय}$$

और $y = a(1 - \cos \theta)$ मानने से

$$\int_0^a (2ay - y^2)^{\frac{m}{2}} \text{ ताय} = a^{m+1} \int_0^{\pi} \cos^{m+1} \theta \text{ ताय इत्यादि ।}$$

१८९। $\int_{-\infty}^{\infty} f(y) \text{ ताय}$ इस का मान जानना है जहाँ जानते हैं कि $f(y)$ में

जो सब से बड़ा y का मान $2n$ हो तो $(f)y$ में y का सब से बड़ा घात $n-2$ के समान वा $2n-2$ से छोटा है और $f(y) = 0$ इस में y का मान कोई सम्भाव्य संख्या नहीं है। इसलिये यहाँ स्पष्ट हो जायगा कि y के सम्भाव्य मान में $\frac{f(y)}{f(y)}$ यह अनन्त के तुल्य नहीं होगा।

मान लो कि $f(y) = 0$ इस में एक जोड़ा असम्भाव्य मान $a_1 + k_1\sqrt{-1}$, $a_1 - k_1\sqrt{-1}$ ये हैं और १७वें प्रक्रम से $\frac{f(y)}{f(y)}$ इस का रूप खण्डभिन्नों में ले आवें तो इन दोनों मानों के वश से एक खण्ड—

$$\text{भिन्न} = \frac{a_1 + k_1\sqrt{-1}}{y - a_1 + k_1\sqrt{-1}}, \text{ दूसरा} = \frac{a_1 - k_1\sqrt{-1}}{y - a_1 - k_1\sqrt{-1}} \text{ है}$$

$$\text{इस लिये दोनों का योग} = \frac{2a_1(y - a_1) + 2k_1k_1}{(y - a_1)^2 + k_1^2}$$

इस प्रकार से दो दो खण्ड भिन्नों का योग करने से

$$\frac{f(y)}{f(y)} = \frac{2a_1(y - a_1) + 2k_1k_1}{(y - a_1)^2 + k_1^2} + \frac{2a_2(y - a_2) + 2k_2k_2}{(y - a_2)^2 + k_2^2} + \dots + \frac{2a_n(y - a_n) + 2k_nk_n}{(y - a_n)^2 + k_n^2} \dots (१)$$

(जहाँ और दो दो असम्भाव्य मानों के वश से a_2, a_2, \dots इत्यादि सिद्ध हुए हैं)

(१) में समच्छेद करने से स्पष्ट है कि दहने पक्ष में y^{2n-1} का गुणक $2(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)$ यह होगा परन्तु बायें पक्ष में अर्थात् $f(y)$ में y^{2n-1} का गुणक ० है क्योंकि मान लिया है कि $f(y)$ में सब से बड़ा y का घात $2n-2$ के समान वा $2n-2$ से छोटा है इस लिये सरूप समीकरण की विधि से $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = 0$ ।

(१) में एक खण्ड का चल साधारण रीति से

$$\int \frac{२आ_१(य-अ_१)ताय}{(य-अ_१)^२ + क_१^२} + \int \frac{२क_१क_१ताय}{(य-अ_१)^२ + क_१^२} = आ_१ला \left\{ (य-अ_१)^२ + क_१^२ \right\} \\ + २क_१स्प^{-१} \int \left(\frac{य-अ_१}{क_१} \right)$$

$$\text{इस लिये } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{२क_१क_१ताय}{(य-अ_१)^२ + क_१^२} = २क_१^{\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{२आ_१(य-अ_१)ताय}{(य-अ_१)^२ + क_१^२} \text{ इस में मान लो कि } \infty = \frac{१}{इ_१ए}, -\infty = \frac{-१}{इ_२ए}$$

जहाँ ए = ०, अब आ_१ला { (य-अ_१)^२ + क_१^२ } इस में य के स्यान में क्रम से $\frac{१}{इ_१ए}, -\frac{१}{इ_२ए}$ का उत्थापन दे कर अन्तर करने से

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{२आ_१(य-अ_१)ताय}{(य-अ_१)^२ + क_१^२} = आ_१[ला \left\{ \left(\frac{१}{इ_१ए} - अ_१ \right)^२ - क_१^२ \right\}$$

$$- ला \left\{ \left(-\frac{१}{इ_२ए} - अ_१ \right)^२ + क_१^२ \right\}]$$

$$= आ_१ [ला \left\{ \frac{(१-इ_१अ_१ए)^२ + इ_१^२क_१^२ए^२}{इ_१^२ए^२} \right\}$$

$$- ला \left\{ \frac{(१+इ_२अ_१ए)^२ + इ_२^२क_१^२ए^२}{इ_२^२ए^२} \right\}]$$

$$= आ_१ला \left\{ \frac{इ_२^२}{इ_१^२} \frac{(१-इ_१अ_१ए)^२ + इ_१^२क_१^२ए^२}{(१+इ_२अ_१ए)^२ + इ_२^२क_१^२ए^२} \right\} = आ_१ला \left[\frac{इ_२^२}{इ_१^२} \right]$$

$$= २आ_१ला \frac{इ_२}{इ_१}, \quad \text{ए का मान शून्य मानने से ।}$$

इस प्रकार से (१) में एक खण्डभिन्न सम्बन्धि $\infty, -\infty$ सीमाओं के भीतर का मान = $२आ_१ला \frac{इ_२}{इ_१} + २क_१^{\pi}$ यह सिद्ध हुआ ।

इसी तरह (१) के सब खण्डभिन्नों के $\infty, -\infty$ सीमाओं के भीतर सान्त-चलों का मान ले आ कर योग कर देने से

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{फ(य)}{फा(य)} ताय = २ (आ_१ + आ_२ + \dots + आ_n) ला \left[\frac{इ_२}{इ_१} \right]$$

$$+ 2\pi(का_1 + का_2 + \dots + का_n)$$

$$= 2\pi(का_1 + का_2 + \dots + का_n \dots \dots (२)$$

१९०। ऊपर के प्रक्रम संबंधि एक उदाहरण अत्यन्त चमत्कृत दिखाते हैं ।

मानो कि $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^{2m} \pi}{1+y^{2n}}$ इस का मान जानना है जहाँ n और m धन अभिन्न

संख्या है और $n > m$ यहाँ मानो कि $y^{2n} + 1 = 0$ इस में एक मान a है तो $2n$ वें प्रक्रम से आ, $-का_1 \sqrt{-1} = -\frac{a^{2m+1}}{2n}$ और चलनकलन के ३१७वें प्रक्रम से a , कोज्या $\frac{2क+1}{2n} \pi + \sqrt{-1}$ ज्या $\frac{2क+1}{2n} \pi$ इस चाल का होगा जिस में क कोई धन संख्या n से छोटी है ।

$$\text{इस लिये } a^{2m+1} = (\text{कोज्या } \frac{2क+1}{2n} \pi + \sqrt{-1} \text{ ज्या } \frac{2क+1}{2n} \pi)^{2m+1}$$

$$= \text{कोज्या } \frac{2क+1}{2n} (2म+1)\pi + \sqrt{-1} \text{ ज्या } \frac{2क+1}{2n} (2म+1)\pi$$

$$= \text{कोज्या } (2क+1) \phi + \sqrt{-1} \text{ ज्या } (2क+1)\phi, \text{ यदि } \frac{(2म+1)\pi}{2n} = \phi$$

इस लिये असम्भाव्य और सम्भाव्य को समान करने से

$$\text{आ, } -का_1 \sqrt{-1} = -\frac{\text{कोज्या}(2क+1)\phi}{2n} - \frac{\sqrt{-1} \text{ ज्या}(2क+1)\phi}{2n}$$

इस में $का_1 = \frac{\text{ज्या}(2क+1)\phi}{2n}$, क के स्थान में $0, 1, 2, \dots, n-1$ का

उत्थापन देकर योग करने से

$$का_1 + का_2 \dots + का_n$$

$$= \frac{1}{2n} \{ \text{ज्या}\phi + \text{ज्या}3\phi + \text{ज्या}5\phi \dots + \text{ज्या}(2न-1)\phi \}$$

इस में यदि $s = \text{ज्या}\phi + \text{ज्या}3\phi + \dots + \text{ज्या}(2न-1)\phi$

तो $2s$ ज्या $\phi = 2\text{ज्या}\phi + 2\text{ज्या}\phi\text{ज्या}3\phi + \dots + 2\text{ज्या}\phi\text{ज्या}(2न-1)\phi$

$$= 1 - \text{कोज्या}2\phi + \text{कोज्या}2\phi - \text{कोज्या}4\phi + \dots$$

$$+ \text{कोज्या}(2न-2)\phi - \text{कोज्या}2न\phi$$

$$= 1 - \text{कोज्या}2न\phi = 2\text{ज्या}\phi \text{ ज्या } \phi = 2\text{ज्या}\phi^2 (2म+1) \frac{\pi}{2} = 2$$

इस लिये $\phi = \frac{1}{\text{ज्या}\phi} = \frac{1}{\text{ज्या } \frac{2म+1}{2न} \pi}$ ।

इसका उत्थापन ऊपर के मान में देने से

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^{2m} \pi}{1+y^{2n}} = \frac{1}{2n} \frac{2\pi}{\text{ज्या } \frac{2म+1}{2न} \pi} = \frac{\pi}{न \text{ ज्या } \frac{2म+1}{2न} \pi}$$

$$= 2 \int_0^{\infty} \frac{y^{2m}}{1+y^{2n}} \text{ ताय (चतुर्थाध्यायके (१) अभ्यासार्थ प्रश्न से)}$$

$$\text{इस लिये } \int_0^{\infty} \frac{y^{2m}}{1+y^{2n}} \text{ ताय} = \frac{\pi}{2n} \cdot \frac{1}{\text{ज्या } \frac{2m+1}{2n}} \pi$$

$$१९१। \int_0^{\infty} \frac{y^{2m}}{1-y^{2n}} \text{ ताय इस का मान जानना है जहाँ } n > m \text{ और दोनों}$$

धनात्मक अभिन्न संख्या हैं ।

इस के जानने के लिये पहले दिखलाने हैं कि

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{ताय}}{1-y^2} = 0$$

$$\text{क्योंकि } \int_0^{\infty} \frac{\text{ताय}}{1-y^2} = \int_0^1 \frac{\text{ताय}}{1-y^2} + \int_1^{\infty} \frac{\text{ताय}}{1-y^2} \text{ (४१ प्रक्रम के (१) समीकरण से)}$$

$$\text{परन्तु यदि } y = \frac{1}{r} \text{ तो } \int_1^{\infty} \frac{\text{ताय}}{1-y^2} = \int_1^{\infty} \frac{\text{तार}}{1-r^2} = - \int_0^1 \frac{\text{तार}}{1-r^2} = - \int_0^1 \frac{\text{ताय}}{1-y^2}$$

(४१ प्रक्रम के (२) समीकरण की कल्पना से)

इसका उत्थापन देने से

$$\int_0^{\infty} \int \frac{\text{ताय}}{1-y^2} = \int_0^1 \frac{\text{ताय}}{1-y^2} + \int_1^{\infty} \frac{\text{ताय}}{1-y^2} = \int_0^1 \frac{\text{ताय}}{1-y^2} - \int_0^1 \frac{\text{ताय}}{1-y^2} = 0$$

यह सिद्ध हुआ ।

$$\text{अब } \int_0^{\infty} \frac{y^{2m} \text{ ताय}}{1-y^{2n}} \text{ इस में स्पष्ट है कि } 1-y^{2n} = 0 \text{ इस में दो सम्भाव्य}$$

मान य के आवँगे एक + १ दूसरा - १ इस लिये खण्डभिन्नों में + १, - १ इन

दोनों मान के वश से जो दो भिन्न होंगे उन का योग = $\frac{1}{n(1-y^n)}$ यह होगा ।

इस लिये ऊपर की युक्ति से

$$\frac{1}{n} \int_0^{\infty} \frac{\text{ताय}}{1-y^n} = 0 \text{ । वाकी खण्डभिन्नों में } n-1 \text{ जोड़े असम्भाव्य मान}$$

होंगे इस लिये

$$\int_0^{\infty} \frac{y^{2m} \text{ ताय}}{1-y^{2n}} = 2 \pi (\text{का}_1 + \text{का}_2 + \dots + \text{का}_{n-1})$$

यहाँ भी ऊपर ही की युक्ति से

$$\text{का}_1 + \text{का}_2 + \dots + \text{का}_{n-1} = \frac{1}{2n} \{ \text{ज्या} 2\phi + \text{ज्या } 4\phi + \dots + \text{ज्या } 2(n-1)\phi \}$$

$$\text{जहाँ पहले के ऐसा } \phi = \frac{(2m+1)\pi}{2n}$$

यहाँ पर भी सरलत्रिकोणमिति की युक्ति से सब जीवाओं के योग

$$\text{का मान} = \frac{\text{कोज्या}\phi - \text{कोज्या}(2n-1)\phi}{2\text{ज्या}\phi} = \text{कोस्प} \frac{(2m+1)\pi}{2n}$$

$$\text{इस लिये } \int_0^\infty \frac{y^{2m}\text{ताय}}{1-y^{2n}} = \frac{\pi}{2n} \text{कोस्प} \frac{2m+1}{2n}\pi$$

इस में और ऊपर के प्रक्रम में यदि $y^{2n} = l$ और $dy = \frac{2m+1}{2} l^{-\frac{1}{2n}}$ तो

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty \frac{y^{2m}\text{ताय}}{1+y^{2n}} &= \int_0^\infty \frac{l^{\frac{2m-1}{2n}}\text{ताल}}{1+l} = \frac{\pi}{\text{ज्या}\frac{\pi}{2n}} \\ \text{और } \int_0^\infty \frac{y^{2m}\text{ताय}}{1-y^{2n}} &= \int_0^\infty \frac{l^{\frac{2m-1}{2n}}\text{ताल}}{1-l} = \pi \text{कोस्प} \frac{\pi}{2n} \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

यहाँ m , और n के वश से सिद्ध कर सकते हो कि $\frac{\pi}{2n}$ सर्वदा धनात्मक और 1 से अल्प है ।

१९२। ऊपर के दो प्रक्रमों में जो दो सान्तचल आये हैं उनके बल से अनेक रूपान्तर बना सकते हो । जैसे ऊपर के प्रक्रम के (१) समीकरण में यदि $h = l^{\frac{1}{2n}}$ तो

$$\int_0^\infty \frac{\text{ताह}}{1+h^{\frac{1}{2n}}} = \frac{\pi}{\text{ज्या}\frac{\pi}{2n}}, \quad \int_0^\infty \frac{\text{ताह}}{1-h^{\frac{1}{2n}}} = \pi \text{कोस्प} \frac{\pi}{2n}$$

इन में $t = \frac{1}{2n}$ मानने से

$$\int_0^\infty \frac{\text{ताह}}{1+h^t} = \frac{\pi}{t \text{ज्या} \frac{\pi}{t}}, \quad \int_0^\infty \frac{\text{ताह}}{1-h^t} = \frac{\pi}{t} \text{कोस्प} \frac{\pi}{t} \dots (1)$$

जहाँ t धन और 1 से अधिक है ।

$$\text{और } \int_0^\infty \frac{y^n \text{ताय}}{1+y^2} = \int_0^1 \frac{y^n \text{ताय}}{1+y^2} + \int_1^\infty \frac{y^n \text{ताय}}{1+y^2}$$

$$\text{परन्तु यदि } y = \frac{1}{l} \text{ तो } \int_1^\infty \frac{y^n \text{ताय}}{1+y^2} = \int_1^0 - \frac{l^{-n} \text{ताल}}{1+l^2} = \int_0^1 \frac{y^{-n} \text{ताय}}{1+y^2}$$

$$\therefore \int_0^{\infty} \frac{y^n \text{ताय}}{1+y^2} = \int_0^1 \frac{y^n + y^{-n}}{1+y^2} \text{ताय} । \dots\dots (२)$$

और १९० प्रक्रम के सान्तचल में यदि $n=1$, और $2m=n-1$ मान लें तो $\int_0^{\infty} \frac{y^n \text{ताय}}{1+y^2} = \frac{\pi}{2 \text{ को ज्या } \frac{n\pi}{2}} \dots\dots (३)$

(३) से (२) का मान

$$= \frac{\pi}{2 \text{ को ज्या } \frac{n\pi}{2}} = \int_0^1 \frac{y^n + y^{-n}}{1+y^2} \text{ताय} = \int_0^1 \frac{y^n + y^{-n}}{y + y^{-1}} \cdot \frac{\text{ताय}}{y} \dots (४)$$

इसी तरह

$$\frac{\pi}{2} \text{ स्प } \frac{n\pi}{2} = \int_0^{\infty} \frac{y^n \text{ताय}}{1-y^2} = \int_0^1 \frac{y^n - y^{-n}}{y - y^{-1}} \cdot \frac{\text{ताय}}{y} \dots (५)$$

सर्वत्र समझो कि $n < 1$ है

(४) और (५) में यदि $y = e^{-x}$ और $x = n\pi$ तो

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-nx} + e^{-nx}}{e^{-nx} + e^{-nx}} \text{ताल} = \frac{\text{छे } \frac{x}{2}}{2} । \int_0^{\infty} \frac{e^{-nx} - e^{-nx}}{e^{-nx} - e^{-nx}} \text{ताल} = \frac{\text{स्प } \frac{x}{2}}{2}, \dots (६)$$

इस तरह से सैकड़ों रूपान्तर कर सकते हो ।

१९३। इस सान्तचलानयन की विधि से फल में चाहे जिस वर्ण को स्वतन्त्र मान उसके वश से चाहे जौन सा तात्कालिक सम्बन्ध जान सकते हैं ।

जैसे $\int_a^k f(y) \text{ताय}$ इस का तात्कालिक सम्बन्ध क को स्वतन्त्र मान उस के वश से निकालना है जहाँ यह जानते हैं कि $f(y)$ में क नहीं है और क और अ यहाँ यदि $\int f(y) \text{ताय} = \text{फा}(y) + \text{स्थि}$,

तो $\int_a^k f(y) \text{ताय} = \text{फा}(k) - \text{फा}(a)$ दोनों परस्पर स्वतन्त्र हैं ।

इस लिये $\frac{\text{तास}}{\text{ताक}} = \frac{\text{ता}}{\text{ताक}} \{ \text{फा}(k) - \text{फा}(a) \} = \frac{\text{ताफा}(k)}{\text{ता क}} = \text{फ}(k)$ यह बड़े लाघव से सिद्ध हो जाता है इसके लिये यूरोप के लोगों की कल्पना जो टाड् हण्टर इत्यादिकों ने लिखी है सो दिखाते हैं ।

कल्पना करो कि $s = \int_a^k f(y) \text{ ताय}$

और जब बदल के $k + \Delta k$ हुआ तब s का मान $s + \Delta s$ हुआ ।

इस लिये $s + \Delta s = \int_a^{k + \Delta k} f(y) \text{ ताय}$.

इस लिये $\Delta s = \int_a^{k + \Delta k} f(y) \text{ ताय} - \int_a^k f(y) \text{ ताय}$
 $= \int_a^{k + \Delta k} f(y) \text{ ताय}$ (४१) प्रक्रम के (१) (समीकरण से)

परन्तु ४०वें प्रक्रम से

$\int_a^{k + \Delta k} f(y) \text{ ताय} = \Delta k f(k + p \Delta k)$

जहां p कोई १ से अल्प भिन्नाङ्क है ।

इस तरह से $\frac{\Delta s}{\Delta k} = f(k + p \Delta k)$, Δk का, मान शून्य मानने से

और $\left. \begin{array}{l} \frac{\text{तास}}{\text{ताक}} = f(k) \\ \frac{\text{तास}}{\text{ताक}} = f^{(n-2)}(k) \end{array} \right\} \dots \dots \dots (१)$

इसी तरह a को स्वतन्त्र मानने से यदि $f(y)$ में a न हो और a, k

परस्पर स्वतन्त्र हों तो $\frac{\text{तास}}{\text{ताअ}} = -f(a)$

और $\frac{\text{तास}}{\text{ताअ}} = -f^{(n-2)}(a) \dots \dots \dots (२)$

१९४ । $s = \int_a^k f(y, g) \text{ ताय}$ यहां पर g को स्वतन्त्र मानने से $\frac{\text{तास}}{\text{ताग}}$ का मान

जानना है जहां a और k दोनों g की अपेक्षा स्वतन्त्र है ।

यहां $s = \int_a^k f(y, g) \text{ ताय}$

इस लिये $s + \Delta s = \int_a^k f(y, g + \Delta g) \text{ ताय}$

और $\Delta s = \int_a^k f(y, g + \Delta g) \text{ ताय} - \int_a^k f(y, g) \text{ ताय}$

$$= \int_{अ}^{क} \{ फ(य, ग + \Delta ग) - फ(य, ग) \} \text{ ताय}$$

इस लिये $\frac{\Delta स}{\Delta ग} = \int_{अ}^{क} \left\{ \frac{फ(य, ग + \Delta ग) - फ(य, ग)}{\Delta ग} \right\} \text{ ताय}$

$\Delta ग$ को शून्य मानने से तात्कालिक सम्बन्ध के धर्म से

$$\frac{\text{तास}}{\text{ताग}} \int_{अ}^{क} \frac{\text{ताफ}(य, ग)}{\text{ताग}} \text{ताय}$$

इसमें इतना समझ लो कि अ, वा क दोनों में से कोई अनन्त के तुल्य नहीं हैं । क्योंकि चलनकलन की युक्ति से

$$\frac{फ(य, ग + \Delta ग) - फ(य, ग)}{\Delta ग} = \frac{\text{ताफ}(य, ग)}{\text{ताग}} + इ_१ \text{ ऐसा होगा ।}$$

जहां $\Delta ग$ को शून्य मानने से इ_१ भी शून्य हो जायगा ।

इस लिये $\frac{\Delta स}{\Delta ग} = \int_{अ}^{क} \frac{\text{ताफ}(य, ग)}{\text{ताग}} \text{ताय} + \int_{अ}^{क} इ_१ \text{ ताय}$

अब यहां प्रत्यक्ष देख पड़ता है कि ग को शून्य मानने से यदि क, और अ अनन्त न हों तो $\int_{अ}^{क} इ_१ \text{ ताय}$ यह शून्य के तुल्य हो जायगा ।

अब जब $\frac{\text{तास}}{\text{ताग}} = \int_{अ}^{क} \frac{\text{ताफ}(य, ग)}{\text{ताग}} \text{ताय}$

इसलिये $\frac{\text{तास}}{\text{ताग}} = \int_{अ}^{क} \frac{\text{ताफ}(य, ग)}{\text{ताग}} \text{ताय}$ } (१)

कल्पना करो कि (१) में \int फ (य, ग) ताय = फा (य, ग)

और $\int \frac{\text{ताफा}(य, ग)}{\text{ताग}} \text{ताय} = \text{फि} (य, ग)$

तो $\frac{\text{तास}}{\text{ताग}} = \frac{\text{ताफा}(क, ग)}{\text{ताग}} - \frac{\text{ताफा}(अ, ग)}{\text{ताग}} = \text{फि}(क, ग) - \text{फि}(अ, ग) \text{ (२)}$

इसमें मानो कि फ (य, ग) में क नहीं है और अ, क से स्वतन्त्र है तो

(२) से $\frac{\text{ता फा}(क, ग)}{\text{ताग}} + \text{फि}(अ, ग) - \frac{\text{ता फा}(अ, ग)}{\text{ताग}} = \frac{\text{ता फा}(क, ग)}{\text{ताग}} + \text{स्थि}$
 $= \text{फि}(क, ग) \dots \dots (३)$

किसी संख्या के वश से किसी सान्तचल का तात्कालिक सम्बन्धानयन । २७५

$$\text{जहां फि (अ, ग) — } \frac{\text{ता फा (अ, ग)}}{\text{ताग}} = \text{स्थि} = \text{क में स्वतन्त्र स्थिराङ्क ।}$$

अब (३) में चाहे क के स्थान में जो उत्पापन दो समीकरण ठीक ही रहेगा मान लो कि क के स्थान में य को रख दिया तो

$$\frac{\text{ता फा (य, ग)}}{\text{ताग}} + \text{स्थि} = \text{फि (य, ग)} \dots \dots \dots (४)$$

(४) में यदि स्थिराङ्क को छोड़ दें और फा (य, ग) और फि (य, ग) के स्थान में इनका पहला मान रख दें तो

$$\frac{\text{ता}}{\text{ताग}} \int \text{फ (य, ग) ताय} = \int \frac{\text{ता फ (य, ग)}}{\text{ताग}} \text{ताय} \dots \dots \dots (५)$$

(५) वें से एक के चलज्ञान से दूसरे का चलज्ञान सहज में हो सकता है जैसे

$$\text{यदि फ (य, ग) = } \frac{१}{१ + ग^२य^२} \text{ तो फ (य, ग) ताय} = \int \frac{\text{ताय}}{१ + ग^२य^२} = \frac{१}{ग} \text{स्प}^{-१}गय$$

$$\begin{aligned} \text{और } \frac{\text{ताफा (य, ग)}}{\text{ताग}} &= -\frac{२ गय^२}{(१ + ग^२य^२)^२} \text{ ता } \int \text{फ (य, ग) ताय} = \frac{\text{ता}}{\text{ताग}} \left(\frac{१}{ग} \text{स्प}^{-१}गय \right) \\ &= \frac{१}{ग} \frac{\text{ता}}{\text{ताग}} (\text{स्प}^{-१}गय) = \frac{१}{ग} \frac{य}{१ + ग^२य^२} \end{aligned}$$

इस लिये (५) वें से

$$\frac{\text{ता}}{\text{ताग}} \int \text{फ (य, ग) ताय} = \frac{१}{ग} \frac{य}{१ + ग^२य^२} = \int \frac{\text{ताफ (य, ग)}}{\text{ताग}} \text{ताय} = - \int \frac{२ गय^२ ताय}{(१ + ग^२य^२)^२}$$

देखो यहां $\int \text{फ (य, ग) ताय} = \int \frac{\text{ताय}}{१ + ग^२य^२}$ इसके ज्ञान से तात्कालिक सम्बन्ध पर से इससे अधिक कठिन का $-\int \frac{२ गय^२ ताय}{(१ + ग^२य^२)^२}$ इसका ज्ञान सहज में हो गया ।

१९५। यदि $स = \int \frac{क}{अ} \text{फ (य, ग) ताय}$ इसमें यदि क, और अ दोनों ग के

फल हों तो $\frac{\text{तास}}{\text{ताग}}$ का मान जानना ।

यहां स्पष्ट है कि तीन चलराशि के वश से अर्थात् अ, क, ग के वश से तात्कालिक सम्बन्ध निकलेगा । इस लिये चलनकलन के प्रक्रम से और

$$\text{ऊपर के प्रक्रमों से } \frac{\text{तास}}{\text{ताग}} = \int \frac{क}{ग} \frac{\text{ताफ (य, ग)}}{\text{ताग}} \text{ताय} + \frac{\text{तास.ताक}}{\text{ताक ताग}} + \frac{\text{तास.ताअ}}{\text{ताअ ताग}}$$

$$= \int_{\text{ग}}^{\text{क}} \frac{\text{ताफ (य, ग)}}{\text{ताग}} \text{ताय} + \text{फ (क, ग)} \frac{\text{ताक}}{\text{ताग}} - \text{फ (अ, ग)} \frac{\text{ताअ}}{\text{ताग}}$$

इसी तरह से

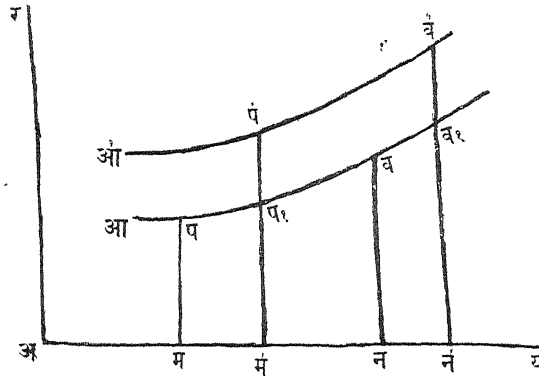
$$\frac{\text{तास}}{\text{ताग}} = \int_{\text{ग}}^{\text{क}} \frac{\text{ताफ (य, ग)}}{\text{ताग}} \text{ताय}$$

$$+ \text{फ (क, ग)} \frac{\text{ताक}}{\text{ताग}} + \frac{\text{ताफ (क, ग)}}{\text{ताक}} \left\{ \frac{\text{ताक}}{\text{ताग}} \right\}^2 + 2 \frac{\text{ताफ (क, ग)}}{\text{ताग}} \cdot \frac{\text{ताक}}{\text{ताग}}$$

$$- \text{फ (अ, ग)} \frac{\text{ताअ}}{\text{ताग}} - \frac{\text{ताफ (अ, ग)}}{\text{ताअ}} \left\{ \frac{\text{ताअ}}{\text{ताग}} \right\}^2 - 2 \frac{\text{ताफ (अ, ग)}}{\text{ताग}} \cdot \frac{\text{ताअ}}{\text{ताग}}$$

इसी तरह $\frac{\text{तास}}{\text{ताग}}$ इसका और इससे अधिक का भी मान जान सकते हो ।

१९६। १९५ प्रक्रम में जो $\frac{\text{तास}}{\text{ताग}}$ इसका मान दिखलाया है उसे क्षेत्र की रीति में भी दिखा सकते हो ।



मान लो कि आपव वक्र का समीकरण $r = \text{फ (य, ग)}$ और आपव का समीकरण $r = \text{फ (य, ग} + \Delta \text{ग)}$ यह है और मानो कि

अम = अ, अ न = क, म मं = Δ अ, न नं = Δ क तो स, पमनव का और स + Δ स पमनव का क्षेत्रफल होगा । इसलिये

$$\Delta \text{स} = \text{पं पं व} + \text{वन नं व} - \text{पम मं प}$$

$$\text{और } \frac{\Delta \text{स}}{\Delta \text{ग}} = \frac{\text{पं पं व}}{\Delta \text{ग}} + \frac{\text{वन नं व}}{\Delta \text{ग}} - \frac{\text{पम मं प}}{\Delta \text{ग}}$$

इस में मं का मान यदि परमाल्प अर्थात् ताय के तुल्य हो तो

$$\frac{\text{पं पं व}}{\text{ग}} = \frac{\text{फ (य, ग} + \Delta \text{ग)} - \text{फ (य, ग)}}{\text{ग} \Delta} \text{ताय, } \frac{\text{वन नं व}}{\Delta \text{ग}} = \text{फ (क, ग)} \frac{\Delta \text{क}}{\Delta \text{ग}}$$

किसी स्थिर संख्या के वश से किसी सान्तचल का सम्बन्धानयन । २७७

और $\frac{प म म पर}{\Delta ग} = फ(अ, ग) \frac{\Delta अ}{\Delta ग}$ । इस पर से $\Delta ग$ के स्थान में ताग मानने से

$$\frac{तास}{ताग} = \frac{ताफ(य, ग)}{ताग} ताय + फ(क, ग) \frac{ताक}{ताग} - फ(अ, ग) \frac{ताअ}{ताग}$$

यही १९५ प्रक्रम में भी उत्पन्न हुआ था ।

१९७। ऊपर के प्रक्रमों में जो सिद्धान्त दिखलाये हैं उनकी व्याप्ति के लिये कुछ उदाहरण दिखलाते हैं ।

(१) उस वक्र को जानना है जिस में चाप, य अक्ष, और कोटि से बने क्षेत्र का फल भुजकोटि के घात से न गुणित हो । जहाँ न कोई स्थिराङ्क है । मानो कि वक्र का समीकरण $r = फ(य)$ है तो फलानयन की विधि से

$\int_0^g फ(य) ताय$ यह उस खण्ड का फल होगा जो वक्रचाप, य अक्ष, और उस कोटि से जिस में $भु = ग$, है बना है इस लिये प्रश्न के आलाप से

$$स = \int_0^g फ(य) ताय = \frac{गफ(ग)}{न} \text{ यह स्थिति चाहे } ग \text{ का मान जो हो}$$

सर्वत्र रहेगी इस लिये ग के वश तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से १९३

$$\text{प्रक्रम के (१) समीकरण से } \frac{तास}{ताग} = फ(ग) = \frac{फ(ग) + गफ'(ग)}{न}$$

$$\text{इस लिये } (न-१) फ(ग) = गफ'(ग)$$

$$\text{और } \frac{फ'(ग)}{फ(ग)} = \frac{न-१}{ग}$$

$$\text{चलानयन से ला } फ(ग) = (न-१) लाग + स्थि$$

अर्थात् $फ(ग) = आग^{न-१}$ जहाँ आ कोई स्थिराङ्क है ।

ग के स्थान में य को रख देने से अभीष्ट वक्र का समीकरण

$$फ(य) = आय^{न-१} \text{ यह हुआ ।}$$

(२) जिस वक्र का $r = फ(य)$ यह समीकरण है उसमें यह जानते हैं कि ग के सब मान में

$$\frac{\int_0^g य \{ फ(य) \}^३ ताय}{\int_0^g \{ फ(य) \}^२ ताय} = \frac{ग}{न} \text{ यह स्थिति है तो } फ(य) \text{ का स्वरूप}$$

कैसा होगा ।

यहाँ प्रश्न के अनुसार छेदगम कर देने से

$$\int_0^g \frac{f(y)}{\sqrt{g-y}} \text{ताय} = \frac{g}{n} \int_0^g \frac{f(y)}{\sqrt{g-y}} \text{ताय ऐसा होगा ।}$$

ग के वश से तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$g \{ f(y) \}^2 = \frac{g}{n} \int_0^g \frac{f(y)}{\sqrt{g-y}} \text{ताय} + \frac{g}{n} \{ f(g) \}^2$$

$$\text{समशोधन से } g \left(1 - \frac{g}{n}\right) \{ f(g) \}^2 = \frac{g}{n} \int_0^g \frac{f(y)}{\sqrt{g-y}} \text{ताय}$$

इस का ग के वश से फिर तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$\left(1 - \frac{g}{n}\right) \{ f(g) \}^2 + 2g \left(1 - \frac{g}{n}\right) f(g) f'(g) = \frac{\{ f(g) \}^2}{n}, f(g)$$

का भाग दे कर समशोधन से $\left(1 - \frac{g}{n}\right) f(g) + 2g \left(1 - \frac{g}{n}\right) f'(g) = 0$

$$\text{इस लिये } \frac{f'(g)}{f(g)} = \frac{2-n}{2(n-1)} \frac{1}{g}, \text{ चलानयन करने से}$$

$$\log f(g) = \frac{2-n}{2(n-1)} \log g + \text{स्थि।}$$

इस लिये $f(g) = \text{आ } g^{\frac{2-n}{2(n-1)}}$ जहाँ आ कोई स्थिराङ्क है ।

इस तरह से $f(y) = \text{आ } y^{\frac{2-n}{2(n-1)}}$ यह सिद्ध हुआ ।

यह उदाहरण स्थिति विद्या में एक चमत्कार कारक है ।

(३) $f(y)$ का ऐसा स्वरूप जानना है जिसमें $\int_0^m \frac{f(y) \text{ताय}}{\sqrt{g-y}}$ यह ग से स्वतन्त्र हो जहाँ जानते हैं कि ग से $f(y)$ स्वतन्त्र है ।

यहाँ मानलो कि $y = g \ell$ तो

$$s = \int_0^g \frac{f(y) \text{ताय}}{\sqrt{g-y}} = \int_0^1 \frac{\sqrt{g} f(g\ell) \text{ताल}}{\sqrt{g(1-\ell)}} \text{अब प्रश्नानुसार स, ग से}$$

स्वतन्त्र है इस लिये

$$0 = \frac{\text{तास}}{\text{ताग}} = \int_0^1 \frac{\frac{f(g\ell)}{2\sqrt{g}} + \ell \sqrt{g} f'(g\ell)}{\sqrt{g(1-\ell)}} = \int_0^1 \frac{f(y) + 2y f'(y)}{2g \sqrt{g-y}} \text{ताय}$$

किसी स्थिर संख्या के वश से किसी सान्तचल का सम्वन्धानयन । २७९

यह सब ग के मान में जब $\frac{\text{तास}}{\text{ताग}} = 0$ है इस लिये अवश्य ४० प्रक्रम के श्रेढी द्वारा सिद्ध कर सकते हो कि

$$f(y) + 2y f'(y) = 0 \therefore \frac{f'(y)}{f(y)} = -\frac{1}{2y}$$

$$\text{इस लिये ला } f(y) = -\frac{1}{2} \text{ ला}(y) + \text{स्थि।}$$

$$\text{इस लिये } f(y) = \frac{\text{आ}}{\sqrt{y}} \text{ जहां आ कोई स्थिराङ्क है।}$$

इस वक्र में नीच स्थान से यदि उस विन्दु तक जिसका भु = y है चाप चाहो तो गति विद्या से

$$\frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} = f(y) = \frac{\text{आ}}{\sqrt{y}} \therefore \text{चा} = 2\text{आ}\sqrt{y}$$

(७१ वां प्रक्रम देखो) इस पर से कह सकते हो कि ऊपर का वक्र चक्रादल होगा ।

$$(४) \int_0^{\infty} e^{-ay} \text{ताय} = \frac{1}{a} \text{ तो यहां न वार अ के वश से तात्कालिक सम्वन्ध}$$

$$\text{निकालने से } \int_0^{\infty} y^n e^{-ay} \text{ताय} = \frac{n!}{a^{n+1}} \text{ यह सिद्ध हुआ।}$$

$$\text{क्योंकि } \int_0^{\infty} e^{-ay} \text{ताय} = \frac{e^{-ay}}{a} = -\frac{1}{ae^{-ay}}$$

$$\text{इस लिये } -\int_0^{\infty} e^{-ay} \text{ताय} = -\frac{1}{ae^{\infty}} + \frac{1}{ae^0} = 0 + \frac{1}{a} = \frac{1}{a}$$

इस तरह से सैकड़ों प्रश्नोत्तर निकाल सकते हो ।

१९८। फ्रुलानी का सिद्धान्त (Theorem of Frullani)

$$\text{इसे सिद्ध करना है कि } \int_0^{\infty} \frac{f(ay) - f(by)}{y} \text{ताय} = f(0) \times \text{ला} \left(\frac{a}{b} \right)$$

$$\text{कल्पना करो कि स} = \int_0^{\infty} \frac{f(l) - f(0)}{l} \text{ताल इस में ल} = ay \text{ तो}$$

$$स = \int_0^{\frac{च}{अ}} \frac{फ(अय) - फ(०)}{य} ताय \dots \dots \dots (१)$$

इस में यदि अ के स्थान में क को रख दें तो

$$स = \int_0^{\frac{च}{क}} \frac{फ(कय) - फ(०)}{य} ताय \dots \dots \dots (२)$$

(१) और (२) के अन्तर पर से

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{च}{अ}} \frac{फ(अय)ताय}{य} - \int_0^{\frac{च}{क}} \frac{फ(कय)ताय}{य} = फ(०)ला \int_0^{\frac{च}{अ}} \frac{ताय}{\frac{च}{क}} \\ & = \int_0^{\frac{च}{अ}} \frac{फ(अय) - फ(कय)}{य} ताय - \int_0^{\frac{च}{क}} \frac{फ(कय)ताय}{य} = फ(०) ला \left(\frac{अ}{क} \right) \dots \dots \dots (३) \end{aligned}$$

$$\text{यहां यदि } च = \infty \text{ तो यदि } \int_0^{\frac{च}{अ}} \frac{फ(कय)ताय}{य} = 0$$

$$\text{तो } \int_0^{\infty} \frac{फ(अय) - फ(कय)}{य} ताय = फ(०) \times ला \left(\frac{क}{अ} \right)$$

जैसे यदि फ(य) = कोज्याय तो

$$\text{यहां } \int_0^{\frac{च}{अ}} \frac{कोज्याकय}{य} ताय = 0 \text{ यदि } च = \infty$$

$$\text{क्योंकि } \int य^{-१} कोज्याकयताय = \frac{य^{-१}ज्याकय}{क} + \frac{१}{क} \int य^{-२} ज्याकयताय$$

(खण्डचलानयन से)

इस लिये य का अनन्त मान मानने से कोज्याकय, और ज्याकय तो सर्वदा १ से कम रहेंगे परन्तु भाजक ∞ के तुल्य होगा ।)

$$\begin{aligned} \text{इस लिये } \int_0^{\infty} \frac{फ(अय) - फ(कय)}{य} ताय &= \int_0^{\infty} \frac{कोज्याअय - कोज्याकय}{य} ताय \\ &= फ(०) ला \left(\frac{क}{अ} \right) = कोज्या(०) \times ला \left(\frac{क}{अ} \right) = ला \left(\frac{क}{अ} \right) \end{aligned}$$

जहाँ कहीं $f(0) = 0$ तहाँ फ्रुलानी (Frullani) के सिद्धान्त से ठीक मान न आवेगा जैसे $\int_0^{\infty} \frac{\text{स्प}^{-1}\text{अय} - \text{स्प}^{-1}\text{कय}}{\text{य}} \text{ताय}$ यहाँ $f(0) = 0$ इस लिये

(३) समीकरण से

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{स्प}^{-1}\text{अय} - \text{स्प}^{-1}\text{कय}}{\text{य}} \text{ताय} = \int \frac{\frac{\text{च}}{\text{क}} \text{स्प}^{-1}\text{कय}}{\frac{\text{च}}{\text{अ}} \text{य}} \text{ताय}, \text{ जहाँ } \text{च} = \infty$$

दहने पक्ष में स्पष्ट है कि $\frac{\text{च}}{\text{अ}}, \frac{\text{च}}{\text{क}}$ भीतर सब अनन्त मान में

$\text{स्प}^{-1}\text{कय} = \text{स्प}^{-1}(\infty) = \frac{\pi}{2}$ इस लिये

$$\int_{\frac{\text{च}}{\text{अ}} \text{क}}^{\frac{\text{च}}{\text{अ}}} \frac{\text{स्प}^{-1}\text{कयताय}}{\text{य}} = \frac{\pi}{2} \int_{\frac{\text{च}}{\text{अ}} \text{क}}^{\frac{\text{च}}{\text{अ}}} \frac{\text{ताय}}{\text{य}} = \frac{\pi}{2} \text{ला} \left(\frac{\text{अ}}{\text{क}} \right)$$

$$\text{इस लिये } \int_0^{\infty} \frac{\text{स्प}^{-1}\text{अय} - \text{स्प}^{-1}\text{कय}}{\text{य}} \text{ताय} = \frac{\pi}{2} \text{ला} \left(\frac{\text{अ}}{\text{क}} \right)$$

१९१। यूलर के चल (Eulerian Integrals)

$\int_0^1 \text{य}^{x-1} (1-\text{य})^{m-1} \text{ताय}$ इस सान्तचल को यूलर का पहला चल कहते हैं ।

और इसे हम बी (द,म) इस संकेत से प्रकाश करते हैं । यूरप के लोग ग्रीक वर्णमाला का दूसरा अक्षर बीटा (B) को लेकर इस को बीटा फल (Beta function) कहते हैं । हमने अपने देश के अनुसार इस का नाम बीजफल रखा है ।

$\int_0^{\infty} \text{इ}^{-\text{य}} \text{य}^{n-1} \text{ताय}$ इस को यूलर का दूसरा चल कहते हैं और इसे हम

गा(न) इस संकेत से प्रकाश करते हैं । यूरप के लोग ग्रीक वर्णमाला का तीसरा अक्षर गाभा (G) को लेकर इसे गामा फल (Gamma function) कहते हैं हमने इसका नाम गाढ़फल रखा है ।

इन दोनों को यूलर ने निकाला है इसी लिये आदर के लिये उसके नाम सहित इन्हें बोलते हैं ।

यूलर का जन्म सन् १७०७ ई० में हुआ था और ७६ वर्ष की अवस्था में इसकी मृत्यु हुई थी बीच में यह अंधा भी हो गया था और घर में आग लग जाने से बहुत से इसके प्रकार भस्म भी हो गये तथापि बहुत से इस के ग्रन्थ अद्यावधि यूरप में प्रसिद्ध हैं जिनका वर्णन मैं इस चलराशिकलन में व्यर्थ समझता हूँ इस लिये अपने कृत्य के ऊपर लौट कर कुछ इन दोनों चलों के सिद्धान्तों को दिखलाता हूँ । नीचे सर्वत्र d , m और n को धन समझो ।

२००। $\int_0^1 y^{d-1} (1-y)^{m-1} \text{ताय} = \int_0^1 y^{m-1} (1-y)^{d-1} \text{ताय}$

$$\int_0^1 y^{d-1} (1-y)^{m-1} \text{ताय} = \int_0^1 y^{m-1} (1-y)^{d-1} \text{ताय}$$

इस लिये बी (द,म) = बी (म,द)

अर्थात् द,म का परस्पर परिवर्तन कर देने से मान में कुछ भी अन्तर नहीं होता ।

यदि बी (द,म) में $y = \frac{r}{1+r}$ तो

$$\int_0^1 y^{d-1} (1-y)^{m-1} \text{ताय} = \text{बी (द,म)} = \int_0^\infty \frac{r^{d-1} \text{तार}}{(1+r)^{d+m}}$$

उसी में यदि $y = \frac{1}{1+r}$ तो

$$\int_0^1 y^{d-1} (1-y)^{m-1} \text{ताय} = \text{बी (द, म)} = \int_0^\infty \frac{r^{m-1} \text{तार}}{(1+r)^{d+m}} ।$$

२०१। यूलर के दूसरे चल में यदि $e^{-y} = r$ अर्थात् $y = \text{ला} \frac{1}{r}$

$$\text{तो} \int_0^\infty e^{-y} y^{n-1} \text{ताय} = \text{गा(न)} = \int_0^1 \left(\text{ला} \frac{1}{r}\right)^{n-1} \text{तार यह एक गा(न)}$$

का रूपान्तर है ।

खण्ड चलानयन से

$$\int e^{-y} y^n \text{ताय} = -e^{-y} y^n + n \int e^{-y} y^{n-1} \text{ताय}$$

और $e^{-y} y^n > 0$ शून्य के तुल्य होता है यदि $y = 0$, $y = \infty$ हो (चलनकलन का ३६ वाँ प्रक्रम देखो)

$$\text{इस लिये} \int_0^\infty e^{-y} y^n \text{ताय} = n \int_0^\infty e^{-y} y^{n-1} \text{ताय}$$

अर्थात् $गा(n+1) = नगा(n)$ (१)

और $\int_0^{\infty} इ^{-य} ताय = १$ (१९७ प्रक्रम के (४) उदाहरण से जहाँ $अ = १$)

इस लिये $गा(१) = १$, (२)

यदि न अभिन्न हो तो (१) और (२) से

$$गा(n+1) = \frac{गा(n)}{न}$$

परन्तु यदि न भिन्न और १ से अधिक हो तो यदि गा(म) इसका मान (जहाँ $म < १$) ज्ञात हो तो (१) समीकरण से बार बार क्रिया करने से गा(न) का मान भी आ जायगा ।

२०२। यदि जय = ल तो

$$\int_0^{\infty} इ^{-जय} य^{न-१} ताय = \frac{१}{जय^n} \int_0^{\infty} इ^{-ल} ल^{न-१} ताल = \frac{गा(n)}{जय^n} ।$$

२०३। $\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} य^{द+म-१} र^{म-१} इ^{-(१+२)य} ताय$ तार इस का द्विगुण

चलानयन से मान ले आवें तो २०२ प्रक्रम से

$$गा(द+म) \int_0^{\infty} \frac{र^{म-१} तार}{(१+र)^{द+म}} = गा(द+म) वी(द,म) \text{ (२०० वें प्रक्रम)}$$

और ऊपर के द्विगुण चल में यदि पहले य के वश से चलानयन करें तो

$$गा(म) \int_0^{\infty} \frac{इ^{-य} य^{द+म-१}}{य^म} ताय = गा(म) \int_0^{\infty} इ^{-य} य^{द-१} ताय$$

= गा(म) गा(द) इस लिये ६३ वें प्रक्रम की अन्तिम युक्ति से

$$गा(द+म) वी(द,म) = गा(म) गा(द)$$

$$\therefore वी(द,म) = \frac{गा(म)गा(द)}{गा(द+म)}$$

इसमें यदि $द+म = १$ तो $गा(द+म) = गा(१) = १$ (२०१ प्रक्रम के (२) स. से)

$$इस लिये वी(द,म) = \int_0^{\infty} \frac{र^{म-१} तार}{१+र} = गा(म) गा(१-म)$$

अब यदि $म < १$ तो १९१ वें प्रक्रम के (१) समीकरण से

$$\int_0^{\infty} \frac{र^{म-१} तार}{१+र} = \frac{\pi}{ज्याम^{\pi}} \text{ इस लिये ।}$$

$$\text{गा}(m) \text{ गा}(1-m) = \frac{\pi}{\text{ज्याम } \pi}$$

इस में यदि $m = \frac{1}{2}$ तो $\{ \text{गा}(\frac{1}{2}) \}^2 = \pi$, $\therefore \text{गा}(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$
 इसे नीचे की युक्ति से भी सिद्ध कर सकते हो ।

२०४। चलनकलन से सिद्ध है कि $\frac{y^x-1}{x} = \text{लाय}$ यदि $x=0$

इस लिये कल्पना करो कि $(\text{ला } \frac{1}{y})^{n-1} = \left[\frac{1-y^x}{x} \right]^{n-1} + r$

जहाँ जब $x=0$ तो $r=0$ । x के स्थान में $\frac{1}{\text{इ}_1}$ रखो तो २०१ प्रक्रम से

$$\text{गा}(n) = \text{इ}_1^{n-1} \int_0^1 (1-y \frac{1}{\text{इ}_1})^{n-1} \text{ताय} + \int_0^1 r \text{ताय}$$

समशोधन से $\text{गा}(n) = \int_0^1 r \text{तार} = \text{इ}_1^{n-1} \int_0^1 (1-y \frac{1}{\text{इ}_1})^{n-1} \text{ताय}$

$$= \text{इ}_1^n \int_0^1 \text{ल}^{\text{इ}_1^{-1}-1} (1-\text{ल})^{n-1} \text{ताल}, y = \text{ल}^{\text{इ}_1} \text{मानने से}$$

अब यहां हमें सामर्थ्य है कि इ_1 को धनात्मक और चाहे जितना बड़ा कल्पना कर सकें इस लिये यदि $\text{इ}_1 = \infty$ तो $r=0$ इस लिये ५१ प्रक्रम के (१) समीकरण से और इ_1 , और n को बदल देने से

$$\text{गा}(n) = \frac{|\text{इ}_1}{n(n+1) \dots (n+\text{इ}_1-1)} \text{इ}_1^{n-1} \dots \dots \dots (१) \cdot$$

(१) में n के स्थान में $n-m$, $n+m$ का उत्थापन देने से

$$\text{गा}(n-m) = \frac{|\text{इ}_1}{(n-m)(n-m+1) \dots (n-m+\text{इ}_1-1)} \text{इ}_1^{n-m-1} \dots \dots \dots (२)$$

$$\text{गा}(n+m) = \frac{|\text{इ}_1}{(n+m)(n+m+1) \dots (n+m+\text{इ}_1-1)} \text{इ}_1^{n+m-1} \dots \dots \dots (३)$$

इस लिये ।

$$\frac{\{ \text{गा}(n) \}^2}{\{ \text{गा}(n-m) \} \{ \text{गा}(n+m) \}} = \frac{\frac{\{ |\text{इ}_1 \}^2 \text{इ}_1^{2n-2}}{n^2(n+1)^2 \dots (n+\text{इ}_1-1)^2}}{\frac{\{ |\text{इ}_1 \}^2 \text{इ}_1^{2n-2}}{(n-m)^2 \{ (n+1)^2-m^2 \} \dots \{ (n+\text{इ}_1-1)^2-m^2 \}}}$$

$$= \frac{(n^2 - m^2) \{ (n+1)^2 - m^2 \} \dots \{ (n+2r-1)^2 - m^2 \}}{n^2 (n+1)^2 \dots (n+2r-1)^2}$$

$$= \left\{ 1 - \frac{m^2}{n^2} \right\} \left\{ 1 - \frac{m^2}{(n+1)^2} \right\} \left\{ 1 - \frac{m^2}{(n+2)^2} \right\} \dots \dots \dots (४)$$

२०५। ऊपर के प्रक्रम के (४) समीकरण में यदि $n = 1$ तो

$$\frac{1}{\text{गा}(1-m)\text{गा}(1+m)} = \left(1 - \frac{m^2}{1^2} \right) \left(1 - \frac{m^2}{2^2} \right) \left(1 - \frac{m^2}{3^2} \right) \dots \dots \dots$$

$$= \frac{\text{ज्याम}\pi}{\text{स}\pi} \text{ (चलनकलन के २०वें प्रक्रम के (८)वें उदाहरण से)}$$

इस लिये $\text{गा}(1-m) \text{गा}(1+m) = \frac{m\pi}{\text{ज्याम}\pi}$

परन्तु २०१ प्रक्रम के (१) समीकरण से $\text{गा}(1+m) = m \text{गा}(m)$

इस लिये $\text{गा}(1-m) \text{गा}(m) = \frac{\pi}{\text{ज्याम}\pi}$ यह सिद्ध हुआ ।

२०६। यदि $ya = \text{गा}\left(\frac{1}{n}\right)\text{गा}\left(\frac{2}{n}\right)\text{गा}\left(\frac{3}{n}\right)\dots\text{गा}\left(\frac{n+1}{n}\right)$ जहां n धन अभिन्न है

तो $ya = \text{गा}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\text{गा}\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\text{गा}\left(\frac{1}{n}\right)$ उलट के लिखने से इस

लिये $ya^2 = \text{गा}\left(\frac{1}{n}\right)\text{गा}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\text{गा}\left(\frac{2}{n}\right)\text{गा}\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\text{गा}\left(\frac{1}{n}\right)\text{गा}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$

$$= \frac{\pi^{n-1}}{\text{ज्या}\frac{\pi}{n}\text{ज्या}\frac{2\pi}{n}\dots\text{ज्या}\frac{(n-1)\pi}{n}} \text{ (ऊपर के प्रक्रम से)}$$

परन्तु चलनकलन के ३१६ प्रक्रम के (१) समीकरण से यदि n के स्थान में $2n$ का उत्थापन दो तो

$$\frac{y^{2n-1}}{y^2-1} = (1-2\text{यकोज्या}\frac{\pi}{2n} + y^2)(1-2\text{यकोज्या}\frac{2\pi}{2n} + y^2)\dots$$

$(1-2\text{यकोज्या}\frac{(n-1)\pi}{2n} + y^2)$ इस में क्रम से $y = 1, y = -1$ मान बायें पक्ष में

उस का ठीक मान न रख देने से

$$n = (2\text{ज्या}\frac{\pi}{2n})^2 (2\text{ज्या}\frac{2\pi}{2n})^2 \dots (2\text{ज्या}\frac{(n-1)\pi}{2n})^2$$

$$n = (2\text{कोज्या}\frac{\pi}{2n})^2 (2\text{कोज्या}\frac{2\pi}{2n})^2 \dots (2\text{कोज्या}\frac{(n-1)\pi}{2n})^2$$

दोनों का घात कर मूल लेने से

$$n = 2^{n-1} \text{ ज्या } \frac{\pi}{n} \text{ ज्या } \frac{2\pi}{n} \dots \text{ ज्या } \frac{(n-1)\pi}{n}$$

$$\text{इस लिये } \pi^2 = \frac{(2\pi)^{n-1}}{n} \quad \text{और } \pi = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{-\frac{1}{2}}$$

$$२०७। \text{ यदि } f(y) = \frac{n^{ny} \text{ गा}(y) \text{ गा}(y + \frac{1}{n}) \text{ गा}(y + \frac{2}{n}) \dots \text{ गा}(y + \frac{n-1}{n})}{n \text{ गा}(ny)} \dots (१)$$

तो य के स्थान में $y+1$ का उत्थापन देने से

$$f(y+1) = \frac{n^{n(y+1)} \text{ गा}(y+1) \text{ गा}(y+1 + \frac{1}{n}) \text{ गा}(y+1 + \frac{2}{n}) \dots \text{ गा}(y+1 + \frac{n-1}{n})}{n \text{ गा}(n(y+1))}$$

$$= \frac{n^{n^2} n^{ny} y \text{ गा}(y) (y + \frac{1}{n}) \text{ गा}(y + \frac{1}{n}) (y + \frac{2}{n}) \text{ गा}(y + \frac{2}{n}) \dots (y + \frac{n-1}{n}) \text{ गा}(y + \frac{n-1}{n})}{n \text{ गा}(ny + n)}$$

$$= \frac{n^{ny} (y + \frac{1}{n}) (y + \frac{2}{n}) \dots (y + \frac{n-1}{n}) f(y)}{(n y + n - 1) (n y + n - 2) \dots n y} = f(y+1)$$

$$= \frac{ny(ny+1)(ny+2) \dots (ny+n-1)}{(ny+n-1)(ny+n-2) \dots ny} f(y) = f(y)$$

इसी तरह $f(y+2) = f(y+1) = f(y) = f(y+m)$ जहाँ m चाहे जैसा बड़ा मान सकते हैं। इस लिये $f(y) = f(\infty)$ जहाँ $\infty = \infty$ । इस लिये $f(y)$, y से स्वतन्त्र है अर्थात् $f(y)$ का मान सर्वदा एक ही होगा चाहे y का कोई मान हो। इस लिये जब $y = \frac{1}{n}$ तो (१) में उत्थान देने से।

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \text{गा}\left(\frac{1}{n}\right) \text{ गा}\left(\frac{2}{n}\right) \text{ गा}\left(\frac{3}{n}\right) \text{ गा}\left(\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{-\frac{1}{2}} \quad (२०६ \text{ प्रक्रम से})$$

और जब

$$\frac{n^{ny} \text{ गा}(y) \text{ गा}(y + \frac{1}{n}) \text{ गा}(y + \frac{2}{n}) \dots \text{ गा}(y + \frac{n-1}{n})}{n \text{ गा}(ny)} = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{-\frac{1}{2}}$$

इस लिये।

$$\text{गा}(y) \text{ गा}(y + \frac{1}{n}) \text{ गा}(y + \frac{2}{n}) \dots \text{ गा}(y + \frac{n-1}{n}) = \text{गा}(ny) (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}} n^{-ny} \dots (२)$$

यह एक साधारण सिद्धान्त उत्पन्न हुआ। इसमें यदि $y = \frac{1}{n}$ तो २०६ प्रक्रम का सिद्धान्त उत्पन्न हो जायगा।

इस (२) समीकरण के सिद्धान्त को गौस (Gauss) ने वर्णन किया है।

२०८। ऊपर के प्रक्रम में (२) का लघुरिक्थ लेकर य के वश तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से ।

$$\frac{n\text{गा}(नय)}{\text{गा}(नय)} = \frac{\text{गा}(य)}{\text{गा}(य)} + \frac{\text{गा}(य + \frac{१}{n})}{\text{गा}(य + \frac{१}{n})} + \dots + \frac{\text{गा}(य + \frac{n-1}{n})}{\text{गा}(य + \frac{n-1}{n})} + \text{नलान} \dots (१)$$

जहाँ गा(नय) इत्यादि $\frac{ता}{ताय}$ { गा(नय) } इत्यादि के बोधक हैं ।

(१) का फिर तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से और नय के स्थान में ल को रखने से ।

$$\frac{\text{ता}^n \text{लागा}(ल)}{\text{ताल}^n} = \frac{१}{n^n} \left\{ \frac{\text{ता}^n \text{लागा}(य)}{\text{ताय}^n} + \frac{\text{ता}^n \text{लागा}(य + \frac{१}{n})}{\text{ताय}^n} + \dots + \frac{\text{ता}^n \text{लागा}(य + \frac{n-1}{n})}{\text{ताय}^n} \right\}$$

यदि न का मान अनन्त कल्पना करें तो दहने पक्ष का मान ४० प्रक्रम के अनुसार

$$\begin{aligned} \frac{१}{n} \int_y^{y+१} \frac{\text{ता}^n \text{लागा}(य)}{\text{ताय}^n} \text{ताय} &= \frac{१}{n} \left\{ \frac{\text{तालागा}(य+१)}{\text{ताय}} - \frac{\text{तालागा}(य)}{\text{ताय}} \right\} \\ &= \frac{१}{n} \left\{ \frac{\text{तालाय} + \text{ताला गा}(य)}{\text{ताय}} - \frac{\text{ताला गा}(य)}{\text{ताल}} \right\} = \frac{१}{n} \left\{ \frac{१}{य} \right\} = \frac{१}{नय} = ० \end{aligned}$$

इस लिये यदि नय अर्थात् ल अनन्त हो तो $\frac{\text{ता}^n \text{ला गा}(ल)}{\text{ताल}^n}$ यह शून्य के तुल्य होगा ।

अब २०१ प्रक्रम के (१) समीकरण से ।

$$\text{गा}(य) = \frac{\text{गा}(य+१)}{य} = \frac{\text{गा}(य+२)}{य(य+१)} = \frac{\text{गा}(य+३)}{य(य+१)(य+२)} = \frac{\text{गा}(य+n)}{य(य+१)\dots(य+n-१)}, \text{ जहाँ}$$

$n = \infty$ इस के लघुरिक्थ का तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से ।

$$\frac{\text{तालागा}(य)}{\text{ताय}} = \frac{\text{तालागा}(य+n)}{\text{ताय}} - \left(\frac{१}{य} + \frac{१}{(य+१)} + \dots + \frac{१}{(य+n-१)} \right)$$

इस का फिर तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से और ऊपर की युक्ति से

$$\frac{\text{ता}^n \text{लागा}(य+n)}{\text{ताय}^n} = ० \text{ करने से ।}$$

$$\frac{\text{ता}^n \text{लागा}(य)}{\text{ताय}^n} = \frac{१}{य^n} + \frac{१}{(य+१)^n} + \frac{१}{(य+२)^n} + \dots \text{अनन्त} \dots (२)$$

इस का y के १ और y के मान में सान्तचलानयन करने से ।

$$\frac{\text{तालागा}(y)}{\text{ताय}} + \text{स्थि} = \left(1 - \frac{1}{y}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{y+1}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{y+2}\right) + \dots \quad (३)$$

इस में यदि $y = 1$ तो दहना पक्ष शून्य हो जायगा इस लिये ।

$$\frac{\text{तालागा}(y)}{\text{ताय}} = -\text{स्थि} = \frac{\text{गा}(1)}{\text{गा}(1)} = \text{गा}(1)$$

अर्थात् स्थि = $-\text{गा}(1)$ । इसको यूलर का स्थिराङ्क कहते हैं । और (३) में जो श्रेढी उत्पन्न हुई है वह y के प्रत्येक धन मान में सान्त होगी अर्थात् उसका प्रत्येक धन y के मान में मान एक निश्चित संख्या के भीतर ही रहेगा ।

$$\text{गा}(n) = \int_0^{\infty} e^{-y} y^{n-1} \text{ताय इस का १९४ प्रक्रम के (१) समीकरण से न के}$$

$$\text{वश तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से } \text{गा}(n) = \int_0^{\infty} e^{-y} y^{n-1} \text{लायताय}$$

$$\text{इस लिये } \text{गा}(1) = \int_0^{\infty} e^{-y} \text{लाय ताय}$$

(१) समीकरण में मानो कि $y = 1$ तो

$$\frac{\text{गा}(n)}{\text{गा}(n)} - \text{लान} = \frac{1}{n} \left\{ \frac{\text{गा}(1)}{\text{गा}(1)} + \frac{\text{गा}(1 + \frac{1}{n})}{\text{गा}(1 + \frac{1}{n})} + \dots + \frac{\text{गा}(1 + \frac{n-1}{n})}{\text{गा}(1 + \frac{n-1}{n})} \right\}$$

$$\text{इसमें यदि } n = \infty \text{ तो } \frac{\text{तालागा}(y)}{\text{ताय}} = \int_1^2 \frac{\text{तालागा}(y)}{\text{ताय}}$$

$$= \text{लागा}(2) - \text{लागा}(1) = 0 \text{ क्योंकि } 2 \text{ ०१ प्रक्रम के (१) समीकरण से } \text{गा}(2) = \text{गा}(1)$$

$$\text{इस लिये यदि } n = \infty \text{ तो } \frac{\text{गा}(n)}{\text{गा}(n)} - \text{लान} = 0 \text{ ऐसा होगा ।}$$

$$(३) \text{ में यदि } y = \infty \text{ तो ऊपर की युक्ति से } \frac{\text{तालागा}(y)}{\text{ताय}} = \frac{\text{गा}(y)}{\text{गा}(y)} - \text{लान} = 0$$

$$\text{इस लिये स्थि} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \text{लान} ।$$

$$\text{परन्तु } \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \dots \frac{n-1}{n} \text{ इसलिये } -\text{लान} = \text{ला}\frac{1}{2} = \text{ला}\frac{1}{2} + \text{ला}\frac{2}{3} \dots + \text{ला}\frac{n-1}{n}$$

$$\text{इस लिये स्थि} = 1 + \frac{1}{2} + \text{ला}\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \text{ला}\frac{2}{3} + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \text{ला} \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} + \text{ला} \left(1 - \frac{2}{3}\right) + \dots$$

इस लिये साधारण रीति से पहले पद को छोड़ कर दो दो पदों को मिला कर एक पद मानने से n संख्यक पद = $\frac{1}{n} + \text{ला} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} - \dots = -\frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{4n^2} + \dots \right)$$

$$\text{इस लिये स्थि} = 1 - \text{यौ} \left\{ \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{4n^2} + \dots \right) \right\}$$

$$= 1 + \text{यौ} \left\{ \frac{1}{n} + \text{ला} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right\} \dots \quad (४)$$

जहाँ न के स्थान में २, ३, ४, इत्यादि का उत्थापन देने से $\frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3n} + \dots \right)$

इस के वा $\frac{1}{n} + \text{ला} \left(1 - \frac{1}{n} \right)$ इस के जितने मान होंगे उन का योग यौ से अपेक्षित है ।

स्थिर का मान जानने के लिये (४) समीकरण में जितना ही अधिक दशमलव अपेक्षित हो उतनीही न की संख्या बढ़ाते जाओ ।

स्थिर का मान १० दशमलव तक '५७७२१५६६४९' यह है । सौ दशमलव से भी अधिक स्थान तक इसका मान परिगणित है ।

(See Proceedings of the Royal Society, Vol. XIX. P. 514, and Vol XX. P. 29)

२०९। ऊपर के प्रक्रम के (२) समीकरण में यदि य के स्थान में $y + 1$ का उत्थापन दें

$$\text{तो } \frac{\text{ता}^n \text{लागा}(y+1)}{\text{ता}y^n} = \frac{1}{(y+1)^2} + \frac{1}{(y+2)^2} + \frac{1}{(y+3)^2} + \dots$$

न-२ बार तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$\frac{\text{ता}^n \text{लागा}(y+1)}{\text{ता}y^n} = (-1)^n |n-1| \left\{ \frac{1}{(y+1)^n} + \frac{1}{(y+2)^n} + \frac{1}{(y+3)^n} + \dots \right\}$$

$$\text{कल्पना करो कि सा}_n = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \dots + \text{अनन्त}$$

तो ऊपर के समीकरण में यदि $y = 0$ और $n > 2$ तो

$$\frac{\text{ता}^n \text{लागा}(y+1)}{\text{ता}y^n} = \text{सा}_n (-1)^n |n-1|$$

परन्तु जब $y = 0$ तो $\frac{\text{तालागा}(y+1)}{\text{ता}y} = \frac{\text{गा}(1)}{\text{गा}(1)} = -\text{स्थि}$ (२०८ प्रक्रम के

(३) समीकरण से) और $\text{लागा}(1+y) = \text{लागा}(1) = \text{ला}(1) = 0$, इसलिये म्याक्लौरिन (maclaurin) के सिद्धान्त से

$$\text{लागा}(1+y) = -\text{स्थिय} + \frac{\text{सा.य}^2}{2} - \frac{\text{सा.य}^3}{3} + \frac{\text{सा.य}^4}{4} - \frac{\text{सा.य}^5}{5} + \dots \quad (१)$$

यदि y का मान १ से अल्प हो तो यह श्रेणी सान्त होगी ।

२०१ प्रक्रम का (१) समीकरण और २०५ प्रक्रम का अन्तिम समीकरण दोनों पर से सिद्ध है कि यदि y के ०, और $\frac{1}{2}$ के भीतर सब मानों में गा(य) इस का मान निरदिष्ट हो तो, $\frac{1}{2}$, १ इन मानों में वा १, $\frac{1}{2}$ इन मानों में अर्थात् वार वार क्रिया करने से y के सब धन मानों में गा(य) का मान जान सकते हैं ।

परन्तु (१) समीकरण की श्रेणी y के ० से लेकर $\frac{1}{2}$ तक सब मानों में लागा (१+y) इस का मान बनाती है फिर इन लघुश्रेणियों पर से १, से ले १ $\frac{1}{2}$ तक सब मानों में गा(य) का मान निकल आवेगा, इस तरह सब y के धन मानों में गा(य) का मान जान सकते हैं ।

$$२१०। \text{लागा}(1+y) = -\text{स्थिय} + \frac{\text{सा.य}^2}{2} - \frac{\text{सा.य}^3}{3} + \dots$$

$$\text{इस लिये लागा}(1-y) = \text{स्थिय} + \frac{\text{सा.य}^2}{2} + \frac{\text{सा.य}^3}{3} + \dots$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{लागा}(1+y) + \text{लागा}(1-y) &= \text{ला} \{ \text{गा}(1+y) \text{ गा}(1-y) \} \\ &= \text{ला} \{ \text{यगा}(य)\text{गा}(1-y) \} = \text{लाय} + \text{ला} \{ \text{गा}(य)\text{गा}(1-y) \} \\ &= \text{ला} \left(\frac{\pi y}{\text{ज्याय}\pi} \right), \dots \dots \dots (२०५ \text{ प्रक्रम से}) \end{aligned}$$

$$= २ \left(\frac{\text{सा.य}^2}{2} + \frac{\text{सा.य}^4}{4} + \dots \right) = \text{ला} \{ \text{गा}(1+y)\text{गा}(1-y) \} = \text{ला} \frac{\pi y}{\text{ज्याय}\pi}$$

$$\text{इसी तरह } -२ \left(\text{स्थिय} + \frac{\text{सा.य}^3}{3} + \dots \right) = \text{ला} \left\{ \frac{\text{गा}(1+y)}{\text{गा}(1-y)} \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{दोनों को जोड़ देने से ला} \frac{\pi y}{\text{ज्याय}\pi} - २ \left(\text{स्थिय} + \frac{\text{सा.य}^3}{3} + \frac{\text{सा.य}^5}{5} + \dots \right) \\ = \text{ला} \{ \text{गा}(1+y) \}^2 \end{aligned}$$

$$\text{इस लिये ला}(1+y) = \frac{1}{2} \text{ला} \frac{\pi y}{\text{ज्याय}\pi} - \left(\text{स्थिय} + \frac{\text{सा.य}^3}{3} + \frac{\text{सा.य}^5}{5} + \dots \right)$$

$$= \frac{1}{2} \text{ला} \frac{\pi y}{\text{ज्याय}\pi} - \text{ला} \frac{1+y}{2-l} + (1-\text{स्थिय})y - \frac{1}{3}(\text{सा.य}^3) - \frac{1}{5}(\text{सा.य}^5) - \dots$$

y का मान $\frac{1}{2}$ से अल्प हो तो यह श्रेणी बहुत शीघ्र सान्त हो जायगी ।

२११। गा (१+y) इस का न्यूनतम मान निकालना हो तो पीछे जो

लागा(१ + य) का मान निकला है उसका तात्कालिक सम्बन्ध निकाल उसको शून्य के तुल्य करो । इस तरह से यदि मान निकालो तो असकृद्धिधि से

गा (१ + य) के न्यूनतम मान में, $१ + य = १ \cdot ४६१६३२१४५११०५$ ।

लेजेण्ड्रे (Legendre) साहव ने लागा (य + १) के मान के लिये एक सारणी बना डाली है जिस में से संक्षेप कर के य के १, २ मानों के भीतर लागा (य) के मान हम इस अध्याय के अन्त में लिखेंगे ।

२१२। बहुत से सान्तचलों का मान गाढ फल के रूप में आ जाता है जैसे $\int_0^{\infty} e^{-ay^2} \text{ ताय}$ इसमें यदि $ay^2 = r$ तो

$$\int_0^{\infty} e^{-ay^2} \text{ ताय} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-r} \text{ तार}}{2a\sqrt{r}} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-r} r^{\frac{1}{2}-1} \text{ तार}}{2a} = \frac{1}{2a} \text{ गा} \left(\frac{1}{2}\right)$$

(गाढ फल के लक्षण से) $= \frac{\sqrt{\pi}}{2a}$ (२०५ वें प्रक्रम से)

$$\text{और } \int_0^1 \frac{y^{d-1}(1-y)^{m-1}}{(y+a)^{d+m}} \text{ ताय}$$

इस में यदि $\frac{y}{y+a} = \frac{r}{1+a}$ तो $y = ar \div 1 + a - r$

$$\int_0^1 \frac{y^{d-1}(1-y)^{m-1}}{(y+a)^{d+m}} \text{ ताय} = \frac{1}{a^m(1+a)^d} \int_0^1 r^{d-1}(1-r)^{m-1} \text{ तार}$$

$$= \frac{1}{a^m(1+a)^d} \text{बी} (d, m) \frac{1}{a^m(1+a)^d} \frac{\text{गा}(d) \text{ गा}(m)}{\text{गा}(d+m)} \text{ (२०३ प्रक्रम से)}$$

फिर $\int_0^1 y^{d-1}(1-y^2)^{m-1} \text{ ताय}$ इस में मानो कि $y^2 = r$ तो

$$\int_0^1 y^{d-1}(1-y^2)^{m-1} \text{ ताय} = \frac{1}{2} \int_0^1 r^{\frac{d}{2}-1}(1-r)^{m-1} \text{ तार} = \frac{\text{गा}\left(\frac{d}{2}\right) \text{ गा}(m)}{2 \text{ गा}\left(\frac{d}{2} + m\right)}$$

इस तरह से $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^p \text{ को ज्या}^q \text{ ताय}$ इसमें यदि $\text{ज्या}^2 = y$ तो

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^p \text{ को ज्या}^q \text{ ताय} = \int_0^1 y^{p+1-1}(1-y^2)^{q-1} \text{ ताय}$$

$$= \frac{\text{गा}\left(\frac{p+1}{2}\right) \text{ गा}\left(\frac{q+1}{2}\right)}{2 \text{ गा}\left(\frac{p+q}{2} + 1\right)}$$

$$\text{लागा}(1+y) = -\text{स्थिय} + \frac{\text{सा.य}^2}{२} - \frac{\text{सा.य}^3}{३} + \frac{\text{सा.य}^4}{४} - \frac{\text{सा.य}^5}{५} + \dots (१)$$

यदि y का मान १ से अल्प हो तो यह श्रेढी सान्त होगी ।

२०१ प्रक्रम का (१) समीकरण और २०५ प्रक्रम का अन्तिम समीकरण दोनों पर से सिद्ध है कि यदि y के ०, और $\frac{१}{३}$ के भीतर सब मानों में गा(य) इस का मान निरिदित हो तो, $\frac{१}{३}$, १ इन मानों में वा १, $\frac{१}{३}$ इन मानों में अर्थात् वार वार क्रिया करने से y के सब धन मानों में गा(य) का मान जान सकते हैं ।

परन्तु (१) समीकरण की श्रेढी y के ० से लेकर $\frac{१}{३}$ तक सब मानों में लागा (१+y) इस का मान बनाती है फिर इन लघुक्रिय पर से १, से ले $\frac{१}{३}$ तक सब मानों में गा(य) का मान निकल आवेगा, इस तरह सब y के धन मानों में गा(य) का मान जान सकते हैं ।

$$२१०। \text{लागा}(1+y) = -\text{स्थिय} + \frac{\text{सा.य}^2}{२} - \frac{\text{सा.य}^3}{३} + \dots$$

$$\text{इस लिये लागा}(1-y) = \text{स्थिय} + \frac{\text{सा.य}^2}{२} + \frac{\text{सा.य}^3}{३} + \dots$$

$$\therefore \text{लागा}(1+y) + \text{लागा}(1-y) = \text{ला} \{ \text{गा}(1+y) \text{ गा}(1-y) \}$$

$$= \text{ला} \{ \text{यगा}(य)\text{गा}(1-y) \} = \text{लाय} + \text{ला} \{ \text{गा}(य)\text{गा}(1-y) \}$$

$$= \text{ला} \left(\frac{\text{यय}}{\text{ज्यायय}} \right), \dots \dots \dots (२०५ \text{ प्रक्रम से})$$

$$= २ \left(\frac{\text{सा.य}^2}{२} + \frac{\text{सा.य}^4}{४} + \dots \right) = \text{ला} \{ \text{गा}(1+y)\text{गा}(1-y) \} = \text{ला} \frac{\text{यय}}{\text{ज्यायय}}$$

$$\text{इसी तरह } -२ \left(\text{स्थिय} + \frac{\text{सा.य}^3}{३} + \dots \right) = \text{ला} \left\{ \frac{\text{गा}(1+y)}{\text{गा}(1-y)} \right\}$$

$$\text{दोनों को जोड़ देने से ला} \frac{\text{यय}}{\text{ज्यायय}} - २ \left(\text{स्थिय} + \frac{\text{सा.य}^3}{३} + \frac{\text{सा.य}^5}{५} + \dots \right)$$

$$= \text{ला} \{ \text{गा}(1+y) \}^2$$

$$\text{इस लिये ला}(1+y) = \frac{१}{३} \text{ ला} \frac{\text{यय}}{\text{ज्यायय}} - \left(\text{स्थिय} + \frac{\text{सा.य}^3}{३} + \frac{\text{सा.य}^5}{५} + \dots \right)$$

$$= \frac{१}{३} \text{ ला} \frac{\text{यय}}{\text{ज्यायय}} - \text{ला} \frac{१+y}{१-y} + (१-\text{स्थिय})\text{य} - \frac{१}{३}(\text{सा.१-१})\text{य}^3 - \frac{१}{५}(\text{सा.१-१})\text{य}^5 - \dots$$

y का मान $\frac{१}{३}$ से अल्प हो तो यह श्रेढी बहुत शीघ्र सान्त हो जायगी ।

२११। गा (१+y) इस का न्यूनतम मान निकालना हो तो पीछे जो

लागा(१ + य) का मान निकला है उसका तात्कालिक सम्बन्ध निकाल उसको शून्य के तुल्य करो । इस तरह से यदि मान निकालो तो असकृद्धिधि से

गा (१ + य) के न्यूनतम मान में, १ + य = १ '४६१६३२१४५११०५ ।

लेजेण्ड्र (Legendre) साहव ने लागा (य + १) के मान के लिये एक सारणी बना डाली है जिस में से संक्षेप कर के य के १, २ मानों के भीतर लागा (य) के मान हम इस अध्याय के अन्त में लिखेंगे ।

२१२। बहुत से सान्तचलों का मान गाढ फल के रूप में आ जाता है जैसे $\int_0^{\infty} e^{-ay^2} \text{ ताय}$ इसमें यदि $ay^2 = r$ तो

$$\int_0^{\infty} e^{-ay^2} \text{ ताय} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-r} \text{ तार}}{2a\sqrt{r}} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-r} r^{\frac{1}{2}-1} \text{ तार}}{2a} = \frac{1}{2a} \text{ गा} \left(\frac{1}{2} \right)$$

(गाढ फल के लक्षण से) $= \frac{\sqrt{\pi}}{2a}$ (२०५ वें प्रक्रम से)

$$\text{और } \int_0^1 \frac{y^{d-1}(1-y)^{m-1}}{(y+a)^{d+m}} \text{ ताय}$$

इस में यदि $\frac{y}{y+a} = \frac{r}{1+a}$ तो $y = r a \div 1 + a - r$

$$\int_0^1 \frac{y^{d-1}(1-y)^{m-1}}{(y+a)^{d+m}} \text{ ताय} = \frac{1}{a^m(1+a)^d} \int_0^1 r^{d-1}(1-r)^{m-1} \text{ तार}$$

$= \frac{1}{a^m(1+a)^d} \text{बी} (d, m) \frac{1}{a^m(1+a)^d} \frac{\text{गा}(d) \text{ गा}(m)}{\text{गा}(d+m)}$ (२०३ प्रक्रम से)

फिर $\int_0^1 y^{d-1}(1-y^2)^{m-1} \text{ ताय}$ इस में मानो कि $y^2 = r$ तो

$$\int_0^1 y^{d-1}(1-y^2)^{m-1} \text{ ताय} = \frac{1}{2} \int_0^1 r^{\frac{d}{2}-1}(1-r)^{m-1} \text{ तार} = \frac{\text{गा}(\frac{d}{2}) \text{ गा}(m)}{2 \text{ गा}(\frac{d}{2} + m)}$$

इस तरह से $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^p \text{कोज्या}^q \text{ ताय}$ इसमें यदि $\text{ज्या}^2 = y$ तो

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^p \text{कोज्या}^q \text{ ताय} = \int_0^1 y^{\frac{p+1}{2}-1}(1-y^2)^{\frac{q+1}{2}-1} \text{ ताय}$$

$= \frac{\text{गा}(\frac{p+1}{2}) \text{ गा}(\frac{q+1}{2})}{2 \text{ गा}(\frac{p+q}{2} + 1)}$

फिर $\int_0^1 \frac{y^{d-1}(1-y)^{m-1} \text{ताय}}{\{ay+k(1-y)\}^{d+m}}$ इस में मानो कि $y = \frac{\text{कर}}{a(1-r)+कर}$ तो

$$\text{इसका रूप} = \frac{1}{a^d k^m} \int_0^1 r^{d-1} (1-r)^{m-1} \text{तार} = \frac{\text{गा}(d)\text{गा}(m)}{a^d k^m \text{गा}(d+m)}$$

फिर $\int_0^a y^{d-1}(a-y)^{m-1} \text{ताय}$ इस में मान लो कि $y = ar$ तो इस का

$$\text{रूप} = a^{d+m-1} \int_0^1 r^{d-1} (1-r)^{m-1} \text{तार} = a^{d+m-1} \frac{\text{गा}(d)\text{गा}(m)}{\text{गा}(d+m)} \dots \dots (१)$$

२१३। $\int \int \int \dots y^{d-1} r^{m-1} l^{n-1} \dots \dots \dots$ ताल तार ताय $\dots \dots \dots$ इस

अनेक गुण चल का मान गाढ़ फल के रूप में ले आवो । जहाँ जानते हैं कि $y+r+l+\dots < 1$ और सब चल संख्याओं का मान ऐसा माना गया है जिसमें अनेक गुण चल का मान धन हो ।

यहाँ पहले l के वश से चलानयन करने से और $0, 1-y-r$ सीमा मानने से $\int l^{n-1} \text{ताल} = \frac{(1-y-r)^n}{n} = \frac{\text{गा}(n)}{\text{गा}(n+1)} (1-y-r)^n$ फिर r के वश से चलानयन करने से r के $0, 1-y$ के मान के भीतर

$$\int r^{m-1} (1-y-r)^n \text{तार} = \frac{(1-y)^{m+n} (\text{गाम})\text{गा}(n+1)}{\text{गा}(m+n+1)}, \text{ २१२ प्रक्रम के (१)}$$

समीकरण से

अन्त में y के वश चलानयन से और $0, 1$ सीमा मानने से ।

$$\int y^{d-1} (1-y)^{m+n} \text{ताय} = \frac{\text{गा}(d)\text{गा}(m+n+1)}{\text{गा}(d+m+n+1)} \text{ इस लिये अभीष्ट अनेक गुण}$$

$$\text{चल का मान} \frac{\text{गा}(n)}{\text{गा}(n+1)} \frac{\text{गा}(m)\text{गा}(n+1)}{\text{गा}(m+n+1)} \frac{\text{गा}(d)\text{गा}(m+n+1)}{\text{गा}(d+m+n+1)}$$

२१४। $\int \int \int \dots a_1^{d-1} k_1^{m-1} x_1^{n-1} \dots \dots \dots$ ताख_१ ताक_१ ताअ_१ इसका

मान गाढ़ फल के रूप में जानना है

$$\text{जहाँ} \left[\frac{a_1}{a} \right]^p + \left[\frac{k_1}{k} \right]^q + \left[\frac{x_1}{x} \right]^m + \dots \dots < 1 \text{ और चल}$$

संख्याओं का मान ऐसा है जिस में सब धन मान हैं ।

$$\text{मान लो कि } y = \left[\frac{a_1}{a} \right]^p, r = \left[\frac{k_1}{k} \right]^q, l = \left[\frac{x_1}{x} \right]^m, \dots \dots$$

तो ऊपर के प्रक्रम से चल का रूप

$$= \frac{\text{अदकमखन} \dots}{\text{प व भ} \dots} \cdot \frac{\text{गा}(\frac{द}{प})\text{गा}(\frac{म}{व})\text{गा}(\frac{न}{भ})}{\text{गा}(\frac{द}{प} + \frac{म}{व} + \frac{न}{भ} + \dots + १)}$$

यह सिद्धान्त लेज्यून डिरिचलेट् (Lejeune Dirichlet.) का निकाला है ।

इस में यदि $प = व = \dots = १$ और $च = अ = क = ख$ तो

$$अ_१ + क_१ + ख_१ + \dots < च$$

$$\iiint \dots अ_१^{द-१} क_१^{म-१} ख_१^{न-१} \dots \text{ताख,ताक,ताअ} \dots$$

$$= \frac{\text{च}^{द+म+न}\text{गा}(द)\text{गा}(म)\text{गा}(न)}{\text{गा}(द+म+न+\dots+१)} = \text{ना च}^{द+म+न+\dots}$$

$$\text{जहाँ ना} = \frac{\text{गा}(द)\text{गा}(म)\text{गा}(न)}{\text{गा}(द+म+न+\dots+१)}$$

इसी प्रकार यदि चलानयन ऐसा किया जाय जिस में $अ_१ + क_१ + ख_१ + \dots$

$$< च + \Delta च$$

तो ऊपर की युक्ति से उस का मान $\text{ना}(च + \Delta च)^{द+म+न}$ ऐसा होगा ।

$$\text{इस लिये दोनों का अन्तर ना} \{ (च + \Delta च)^{द+म+न+\dots} - च^{द+म+न+\dots} \}$$

$$= \text{ना}(द+म+न+\dots) च^{द+म+न+\dots-१} \Delta च \text{ यदि } \Delta च \text{ अत्यन्त अल्प हो}$$

$$= \frac{\text{गा}(द)\text{गा}(म)\text{गा}(न) \dots}{\text{गा}(द+म+न+\dots)} च^{द+म+न+\dots-१} \Delta च$$

$$२१५। \iiint \dots य^{द-१} र^{म-१} ल^{न-१} \dots \text{फ}(य+र+ल+\dots) \text{तालतारताय इस}$$

का मान एक चलानयन के रूप में ले आना है, जहाँ चलानयन ऐसा किया गया है जिस में सब चलों के धन मान लिये गये हैं जहाँ $य+र+ल+\dots < ग$ ।

लाघव के लिये मान लो कि तीन चलराशि हैं ।

यहाँ ऊपर के प्रक्रम की युक्ति से यदि $\text{फ}(य+र+ल)$ के स्थान में १ मान लें तो उस भाग का चल जो कि योग के च, $च + \Delta च$ के भीतर है

$$\frac{\text{गा}(द)\text{गा}(म)\text{गा}(न)}{\text{गा}(द+म+न)} च^{द+म+न+\dots-१} \Delta च \text{ यह होगा}$$

परन्तु $\text{फ}(य+र+ल) = \text{फ}(च)$ के स्थान में १ रख कर ऊपर का मान दिखलाया है इस लिये उस को $\text{फ}(च)$ से गुण देने से

$$\frac{\text{गा}(द)\text{गा}(म)\text{गा}(न)}{\text{गा}(द+म+न)} \text{फ}(च) च^{द+म+न+\dots-१} \Delta च \text{ यह एक खण्ड की गति हुई}$$

इस लिये सम्पूर्ण चल = $\frac{\text{गा}(\frac{द}{व})\text{गा}(\frac{म}{व})\text{गा}(\frac{न}{व})}{\text{गा}(\frac{द}{व} + \frac{म}{व} + \frac{न}{व})} \int_0^{\infty} \text{गक}(च) च^{द+म+न-१} \text{ताच}$ यही रीति

चाहे जितनी चलराशि हों सर्वत्र दिखलाई जा सकती है ।

२१६। इसी प्रकार त्रिगुण चल

$$\int \int \int \text{अ}^{द-१} \text{क}^{म-१} \text{ख}^{न-१} \text{फ} \left\{ \left(\frac{\text{अ}_१}{\text{अ}} \right)^प + \left(\frac{\text{क}_१}{\text{क}} \right)^व + \left(\frac{\text{ख}_१}{\text{ख}} \right)^भ \right\}$$

ताख, ताक, ताअ, यह जहाँ चलराशियों के सब धन मान में

$$\left[\frac{\text{अ}_१}{\text{अ}} \right]^प + \left[\frac{\text{क}_१}{\text{क}} \right]^व + \left[\frac{\text{ख}_१}{\text{ख}} \right]^भ \text{ यह ग से अधिक नहीं है}$$

$$\frac{\text{अ}^{द-१} \text{क}^{म-१} \text{ख}^{न-१}}{\text{पवभ}} \frac{\text{गा}(\frac{द}{प})\text{गा}(\frac{म}{व})\text{गा}(\frac{न}{भ})}{\text{गा}(\frac{द}{प} + \frac{म}{व} + \frac{न}{भ})} \int_0^{\infty} \text{गक}(च) च^{द+म+न-१} \text{ताच}$$

इसके तुल्य होगा ।

यह रीति चाहे जितनी चलराशि हों सर्वत्र दिखलाई जा सकती है ।

$$२१७। \int \int \frac{\text{य}^{प-१} \text{र}^{व-१} \text{तायतार}}{(\text{त} + \text{अय} + \text{कर})^{प+व}} \text{इसका रूप साधारण चलानयन के}$$

अर्थात् एक चलानयन के स्वरूप में ले आना है जहाँ य, र के सब मान धन हैं और य + र यह ज से अधिक नहीं है । और प, व, त, अ, और क सब धन स्थिराङ्क हैं । मान लो कि अ > क तो

$$\text{त} + \text{अय} + \text{कर} = \text{त} + \text{अ}(\text{य} + \text{र}) - (\text{अ} - \text{क}) \text{र} = \text{श} - \text{ह}$$

$$\text{जहाँ श} = \text{त} + \text{अ}(\text{य} + \text{र}), \text{ह} = (\text{अ} - \text{क}) \text{र}$$

$$\text{इस लिये } (\text{त} + \text{अय} + \text{कर})^{-प-व}$$

$$= \text{श}^{-प-व} \left\{ १ + (\text{प} + \text{व}) \frac{\text{ह}}{\text{श}} + \frac{(\text{प} + \text{व}) (\text{प} + \text{व} + १)}{२} \frac{\text{ह}^२}{\text{श}^२} + \dots \right\}$$

यह श्रेणी सान्त होगी ।

अब ऊपर का द्विगुण चल २१५ वें प्रक्रम से एक चलानयन के रूप में आ

$$\begin{aligned} \text{सकता है अर्थात् } & \int \int \frac{\text{य}^{प-१} \text{र}^{व-१} \text{तायतार}}{(\text{त} + \text{अय} + \text{कर})^{प+व}} \\ & = \int \int \left[\frac{\text{य}^{प-१} \text{र}^{व-१}}{\text{श}^{प+व}} + \frac{(\text{प} + \text{व})(\text{अ} - \text{क}) \text{य}^{प-१} \text{र}^{व}}{\text{श}^{प+व+१}} \right. \\ & \left. + \frac{(\text{प} + \text{व}) (\text{प} + \text{व} + १) (\text{अ} - \text{क})^२ \text{य}^{प-१} \text{र}^{व+१}}{२ \text{श}^{प+व+२}} + \dots \right] \text{तायतार} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^z \left\{ \frac{\text{गा}(\text{प})\text{गा}(\text{व})}{\text{गा}(\text{प}+\text{व})} \frac{\tau^{\text{प}+\text{व}-१}}{(\text{त}+\text{अट})^{\text{प}+\text{व}}} + \frac{\text{गा}(\text{प})\text{गा}(\text{व}+१)}{\text{गा}(\text{प}+\text{व}+१)} (\text{प}+\text{व})(\text{अ}-\text{क}) \frac{\tau^{\text{प}+\text{व}}}{(\text{त}+\text{अट})^{\text{प}+\text{व}+१}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\text{गा}(\text{प})\text{गा}(\text{व}+२)}{\text{गा}(\text{प}+\text{व}+२)} \cdot \frac{(\text{प}+\text{व})(\text{प}+\text{व}+१)}{२} \frac{(\text{अ}-\text{क})^२ \tau^{\text{प}+\text{व}+१}}{(\text{त}+\text{अट})^{\text{प}+\text{व}+२}} + \dots \right\} \text{ताट} \\
 &= \text{गा}(\text{प}) \int_0^z \frac{\tau^{\text{प}+\text{व}-१}}{(\text{त}+\text{अट})^{\text{प}+\text{व}}} \left\{ \frac{\text{गा}(\text{व})}{\text{गा}(\text{प}+\text{व})} + \frac{(\text{प}+\text{व})\text{गा}(\text{व}+१)}{\text{गा}(\text{प}+\text{व}+१)} \frac{(\text{अ}-\text{क})\tau}{(\text{त}+\text{अट})} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(\text{प}+\text{व})(\text{प}+\text{व}+१)\text{गा}(\text{व}+२)(\text{अ}-\text{क})^२ \tau^२}{\text{गा}(\text{प}+\text{व}+२) \cdot २ \cdot (\text{त}+\text{अट})^२} + \dots \right\} \text{ताट} \\
 &= \frac{\text{गा}(\text{प})\text{गा}(\text{व})}{\text{गा}(\text{प}+\text{व})} \int_0^z \frac{\tau^{\text{प}+\text{व}-१}}{\text{त}+\text{अट}} \left\{ १ + \frac{\text{व}(\text{अ}-\text{क})\tau}{\text{त}+\text{अट}} + \frac{\text{व}(\text{व}+१)}{२} \frac{(\text{अ}-\text{क})^२ \tau^२}{(\text{त}+\text{अट})^२} + \dots \right\} \text{ताट} \\
 &= \frac{\text{गा}(\text{प})\text{गा}(\text{व})}{\text{गा}(\text{प}+\text{व})} \int_0^z \frac{\tau^{\text{प}+\text{व}-१}}{(\text{त}+\text{अट})^{\text{प}+\text{व}}} \left\{ १ - \frac{(\text{अ}-\text{क})\tau}{\text{त}+\text{अट}} \right\}^{-\text{व}} \text{ताट} \\
 &= \frac{\text{गा}(\text{प})\text{गा}(\text{व})}{\text{गा}(\text{प}+\text{व})} \int_0^z \frac{\tau^{\text{प}+\text{व}-१} \text{ताट}}{(\text{त}+\text{अट})^{\text{प}} (\text{त}+\text{कट})^{\text{व}}}
 \end{aligned}$$

इस तरह से अनेक सिद्धान्त बना सकते हो ।

२१८। $\int_0^{\infty} \text{इ}^{-\text{अ}^२\text{य}^२} \text{कोज्या२रयताय}$ इस का मान जानना है जहाँ र और

य परस्पर स्वतन्त्र हैं । मान लो कि उद्दिष्ट सान्तचल = स है तो १९४ प्रक्रम के (१) समीकरण से

$$\frac{\text{तास}}{\text{तार}} = -२ \int_0^{\infty} \text{यइ}^{-\text{अ}^२\text{य}^२} \text{ज्या२रयताय}$$

$$\text{परन्तु} \int \text{यइ}^{-\text{अ}^२\text{य}^२} \text{ज्या२रयताय}$$

$$= -\frac{\text{इ}^{-\text{अ}^२\text{य}^२} \text{ज्या२रय}}{२\text{अ}^२} + \frac{२\text{र}}{२\text{अ}^२} \int \text{इ}^{-\text{अ}^२\text{य}^२} \text{कोज्या२रयताय}$$

(खण्ड चलानयन से)

$$\text{इस लिये} \int_0^{\infty} \text{यइ}^{-\text{अ}^२\text{य}^२} \text{ज्या२रयताय} = \frac{२\text{र}}{२\text{अ}^२} \int_0^{\infty} \text{इ}^{-\text{अ}^२\text{य}^२} \text{कोज्या२रय}$$

$$= \frac{२\text{रस}}{२\text{अ}^२} \text{इसलिये} \frac{\text{तास}}{\text{तार}} = -\frac{२\text{रस}}{\text{अ}^२}$$

स का भाग दे देने से

$$\frac{\text{तास}}{\text{तार}} = \frac{\text{ताला(स)}}{\text{तार}} = -\frac{२र}{अ^२} \therefore \text{लास} = -\frac{र^२}{अ^२} + \text{स्थि}$$

$$\text{इस लिये स} = \text{आ इ}^{-\frac{र^२}{अ^२}}$$

जहाँ आ कोई र के वश से स्थिराङ्क है ।

$$\text{मान लो कि } र=० \text{ तो } \int_0^{\infty} इ^{-अ^२य^२} \text{ ताय} = \frac{\sqrt{\pi}}{२अ} \text{ (२१२ वें प्रक्रम से)}$$

$$\text{इस लिये आ} = -\frac{\sqrt{\pi}}{२अ}, \text{ और}$$

$$\int_0^{\infty} इ^{-अ^२य^२} \text{ कोज्यारयताय} = \frac{\sqrt{\pi}}{२अ} इ^{-\frac{र^२}{अ^२}}$$

यद्यपि १९४ प्रक्रम में लिख आये हैं कि यदि कोई सीमा अनन्त के तुल्य न हो तब १९४ प्रक्रम का (१) समीकरण सत्य होगा परन्तु इस स्थान में अनन्त सीमा होने पर भी ठीक होगा क्योंकि दूसरा खण्ड यहाँ पर $\int_0^{\infty} इ^{-अ^२य^२} इ_२ \text{ ताय}$

शून्य ही होगा यदि $इ_१=०$ हो तो क्योंकि ४०वें प्रक्रम की युक्ति से मान लो कि श्रेणी में $इ_१$ का सब से बड़ा मान यदि $इ_२$ हो तो $\int_0^{\infty} इ^{-अ^२य^२} इ_१ \text{ ताय}$

यह $इ_२ \int_0^{\infty} इ^{-अ^२य^२} \text{ ताय}$ इस से अर्थात् $\frac{\sqrt{\pi}}{२अ} इ_२$ इस से छोटा होगा ।

परन्तु कल्पना जैसा किया है उस के धर्म से $इ_२=०$ होगा इस लिये दूसरे खण्ड का नाश हो जाने से १९४ प्रक्रम का (१) समीकरण यहाँ ठीक ही हुआ ।

$$२१।९ \int_0^{\infty} इ^{-जय} \frac{\text{ज्यारय}}{य} \text{ ताय इस का मान जानना है जहाँ ज स्थिराङ्क}$$

और र, य परस्पर स्वतन्त्र हैं । यहाँ मान का मान स मान लो तो १९४ प्रक्रम से

$$\frac{\text{तास}}{\text{तार}} = \int_0^{\infty} इ^{-जय} \text{ कोज्यारयताय}$$

$$\text{परन्तु } \int इ^{-जय} \text{ कोज्यारयताय}$$

$$= इ^{-जय} \frac{\text{रज्यारय} - \text{जकोज्यारय}}{\text{ज}^२ + \text{र}^२} \text{ खण्ड चलानयन से}$$

$$\text{इस लिये } \int_0^{\infty} e^{-जय} \text{ कोज्यारयताय} = \frac{ज}{ज^2 + र^2} \dots\dots\dots (१)$$

$$\text{इस तरह से } \frac{\text{तास}}{\text{तार}} = \frac{ज}{ज^2 + र^2}$$

$$\text{इस लिये } स = \text{स्प}^{-१} \frac{र}{ज} \dots\dots\dots (२)$$

यहां पर स्थिराङ्क की अपेक्षा नहीं है क्योंकि यदि $र = ०$ तो सभी शून्य हो जायगा । यहां ज के सब धन मान में स का मान ठीक होगा इस लिये यदि $ज = ०$

$$\text{तो } स = \text{स्प}^{-१} \frac{र}{ज} = \frac{\pi}{३} = \int_0^{\infty} \frac{\text{ज्याजय}}{य} \text{ ताय}$$

यदि ज ऋणात्मक हो तो स का मान $-\frac{\pi}{३}$ होगा ।

$$\text{इस पर से } \int_0^{\infty} \frac{\text{ज्या कय कोज्या अय}}{य} \text{ ताय इसका मान जान सकते हैं क्योंकि}$$

सरलत्रिकोणमिति से यह

$$\frac{१}{३} \int_0^{\infty} \frac{\text{ज्या (क + अ) य}}{य} \text{ ताय} + \frac{१}{३} \int_0^{\infty} \frac{\text{ज्या (क - अ) य}}{य} \text{ ताय}$$

इस के तुल्य हुआ और (२) समीकरण में $ज = ०$ मानने से दोनों खण्डों का मान $\frac{\pi}{३}$ इस लिये ।

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{ज्या कय कोज्या अय}}{य} \text{ ताय} = \frac{\pi}{३} + \frac{\pi}{३} = \frac{२\pi}{३} \text{ परन्तु यदि } अ > क \text{ तो}$$

$$\text{ऊपर की युक्ति से } \int_0^{\infty} \frac{\text{ज्या कय कोज्या अय}}{य} \text{ ताय} = ० \text{ यह होगा ।}$$

$$२२०। स = \int_0^{\infty} e^{-(य^2 + \frac{अ^2}{य^2})} \text{ ताय इस का मान जानना है ।}$$

$$\text{यहां } \frac{\text{तास}}{\text{ताअ}} = -२अ \int_0^{\infty} e^{-(य^2 + \frac{अ^2}{य^2})} \frac{\text{ताय}}{य^३} \text{ इस में यदि } य = \frac{अ}{ल}$$

$$\text{तो } य^२ + \frac{अ^२}{य^२} = \frac{अ^२}{ल^२} + ल^२, \frac{\text{ताय}}{य^३} = -\frac{अ \text{ ताल}}{ल^३} \times \frac{ल^३}{अ} = -\text{ताल}$$

$$\begin{aligned} \text{इस लिये } \frac{\text{तास}}{\text{ताअ}} &= -२ अ \int_0^{\infty} e^{-(य^2 + \frac{अ^२}{य^२})} \frac{\text{ताय}}{य^३} \\ &= २ अ \int_0^{\infty} e^{-(ल^२ + \frac{अ^२}{ल^२})} \text{ ताल} \end{aligned}$$

$$= -2 \text{ अ } \int_0^{\infty} e^{-(l^2 + \frac{a^2}{l^2})} \text{ ताल} = -2 \text{ अ स}$$

$$\text{इस लिये} \quad \text{तालास} = -2 \text{ ताअ}$$

$$\therefore \quad \text{लास} = -2 \text{ अ} + \text{स्थि}$$

$$\text{इस लिये} \quad \text{स} = \text{आ } e^{-2\text{अ}}$$

$$\text{ऊपर के स मान में यदि अ} = 0, \text{ स} = \int_0^{\infty} e^{-y^2} \text{ ताय} = \frac{\pi}{2} \text{ (२१२वें प्रक्रम से)}$$

$$\text{इस लिये आ} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ और स} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2\text{अ}} = \int_0^{\infty} e^{-(y^2 + \frac{a^2}{y^2})} \text{ ताय}$$

$$२२१। \int_0^1 y^m (\text{लाय})^n \text{ ताय} = \text{स}, \text{ इस का मान जानना है।}$$

$$\text{यहां यदि } y = e^{-x} \text{ तो}$$

$$\begin{aligned} \text{स} &= \int_0^1 y^m (\text{लाय})^n \text{ ताय} = (-1)^n \int_0^{\infty} e^{-(m+1)x} l^n \text{ ताल} \\ &= \frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}} \int_0^{\infty} e^{-(m+1)x} \{l(m+1)\}^n (m+1) \text{ ताल} \\ &= \frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}} \int_0^{\infty} e^{-x} l^n \text{ ताल} \quad | \text{ (यदि } (m+1)l = l \text{)} \\ &= \frac{(-1)^n \text{गा}(n+1)}{(m+1)^{n+1}} \end{aligned}$$

$$\text{यदि लाय के स्थान में } -\text{ला} \left(\frac{1}{y}\right) = (-1) \text{ ला} \frac{1}{y} \text{ रखें तो}$$

$$\int_0^1 y^m (\text{लाय})^n \text{ ताय} = \int_0^1 y^m (-1)^n (\text{ला} \frac{1}{y})^n \text{ ताय}$$

$$= (-1)^n \int_0^1 y^m (\text{ला} \frac{1}{y})^n \text{ ताय} = \frac{\{(-1)^n\}^2 \text{गा}(n+1)}{(m+1)^{n+1}} = \frac{\text{गा}(n+1)}{(m+1)^{n+1}}$$

$$२२२। \int_0^1 \frac{\text{लाय ताय}}{१-y} = \int_0^1 \text{लाय ताय} (१+y+y^2+\dots)$$

$$= -(१ + \frac{१}{२} + \frac{१}{३} + \dots) \quad | \text{ (ऊपर के उदाहरण से)}$$

$$= -\frac{\pi^2}{६} \quad | \text{ (चलनकलन के २० वें प्रक्रम का (९) उदाहरण दे.)}$$

इस तरह से अनेक उदाहरण कर सकते हैं।

२२३ । कल्पना करो कि

$$स = \int_{अ}^{क} फ (य, ग) ताय$$

तो स ताग = $\int_{अ}^{क} फ (य, ग) ताय ताग$

इस लिये

$$\begin{aligned} \int_{अ_१}^{क_१} स ताग &= \int_{अ_१}^{क_१} \int_{अ}^{क} फ (य, ग) ताय ताग \\ &= \int_{अ}^{क} \int_{अ_१}^{क_१} फ (य, ग) ताग ताय । \end{aligned}$$

६३वें प्रक्रम से

इस पर से भी अनेक सान्तचलों के मान बड़े लाघव से सिद्ध हो जाते हैं ।

२२४ । जानते हैं कि $\int_0^{\infty} इ^{-जय} ताय = \frac{१}{ज}$ । १९० प्रक्रम का (४)

उदाहरण देखो

इस लिये ऊपर के प्रक्रम को युक्ति से यदि ज = ग, क = ∞, अ = ० तो

$$\int_{अ_१}^{क_१} स ताग = \int_{अ_१}^{क_१} \frac{ताज}{ज} = ला \frac{क_१}{अ_१} = \int_0^{\infty} \int_{अ_१}^{क_१} फ (य, ग) ताग ताय$$

$$\text{परन्तु } \int फ (य, ग) ताग = \int फ (य, ज) ताज = \int इ^{-जय} ताज$$

$$= - \frac{इ^{-जय}}{य}, \text{ इस लिये}$$

$$\int_{अ_१}^{क_१} इ^{-जय} ताज = \frac{इ^{-अ_१, य} - इ^{-क_१, य}}{य} \text{ इस लिये}$$

$$\int_0^{\infty} \int_{अ_१}^{क_१} फ (य, ज) ताज ताय = \int_0^{\infty} \frac{इ^{-अ_१, य} - इ^{-क_१, य}}{य} ताय = ला \frac{क_१}{अ_१}$$

२२५ । खण्डचलानयन से जानते हैं कि

$$\int_0^{\infty} इ^{-गय} कोज्याअ_१, य ताय = \frac{ग}{ग^२ + अ_१^२}$$

दोनों पक्षों का ग के वश चलानयन करने से और ग की सीमा, अ, क मानने से ।

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-अय} - e^{-कय}}{य} \text{कोज्याअ,य ताय} = \frac{1}{2} \text{ला} \frac{क^2 + अ^2}{अ^2 + अ^2}$$

$$२२६। \text{ यदि आ} = \int_0^{\infty} \frac{\text{ज्याअ,य}}{य} \text{ताय और का} = \int_0^{\infty} \frac{\text{कोज्याअ,य}}{१ + य^२} \text{ताय}$$

आ में यदि अ,य = र

तो आ = $\int_0^{\infty} \frac{\text{ज्यार}}{र}$ तार । इस लिये अ, से आ का कुल भी सम्बन्ध नहीं है और २१९ वें प्रक्रम की युक्ति से आ = $\frac{\pi}{२}$

$$\text{अब का} = \int_0^{\infty} \frac{\text{कोज्याअ,य}}{१ + य^२} \text{ताय}$$

$$\text{इस लिये} \frac{\text{ताका}}{\text{ताअ,}} = \int_0^{\infty} \frac{-य \text{ज्या अ,य}}{१ + य^२} \text{ताय}$$

$$\text{और} \int_0^{\text{अ,}} \text{का ताअ,} = \int_0^{\infty} \frac{\text{ज्या अ,य}}{य(१ + य^२)} \text{ताय}$$

$$\text{इस लिये} \int_0^{\text{अ,}} \text{का ताअ,} - \int \frac{\text{ताका}}{\text{ताअ,}} = \int_0^{\infty} \frac{(१ + य^२)\text{ज्याअ,य}}{य(१ + य^२)} \text{ताय} = \text{आ}$$

समशोधन करने से

$$\int_0^{\text{अ,}} \text{का ताअ,} - \frac{\text{ताका}}{\text{ताग,}} - \text{आ} = ० \dots\dots\dots (१)$$

(१) को $e^{-अ,ताअ,}$ से गुणकर अ, के वश से चलानयन करने से $e^{-अ,} \left(\int_0^{\text{अ,}} \text{का ताअ,} + \text{का} - \text{आ} \right) = \text{स्थिराङ्क}$

इसलिये अ, का चाहे जो मान हो (१) का चल कोई नियत संख्या के तुल्य होगा इस लिये यदि अ, अनन्त के तुल्य हो तो पिछले समीकरण में स्थिराङ्क शून्य के तुल्य होगा क्योंकि उसका बायाँ पक्ष शून्य के तुल्य होता है इस लिये अ, के अनन्त मान में

$$e^{-a_1} \left(\int_0^{a_1} \text{का ताअ}_1 + \text{का} - \text{आ} \right) = 0 = \int_0^{a_1} \text{का ताअ}_1 + \text{का} - \text{आ}, \dots (2)$$

इस लिये (१) और (२) के अन्तर से

$$\frac{\text{ताका}}{\text{ताअ}_1} = -\text{का}$$

इस लिये का = आ, इ e^{-a_1} जहाँ आ, कोई स्थिराङ्क है

$$\text{और } \int \text{का ताअ}_1 = \int \text{आ, इ } e^{-a_1} \text{ताअ}_1 = -\text{आ, इ } e^{-a_1}$$

$$\text{इस लिये } \int_0^{a_1} \text{का ताअ}_1 = \text{आ,} - \text{आ, इ } e^{-a_1}$$

(२) में इन का उत्थापन देने से

$$\int_0^{a_1} \text{काताअ}_1 + \text{का} - \text{आ} = \text{आ,} - \text{आ, इ } e^{-a_1} + \text{आ, इ } e^{-a_1} - \text{आ} = \text{आ,} - \text{आ} = 0$$

$$\therefore \text{अ,} = \text{आ इस लिये का} = \text{आ इ } e^{-a_1} \dots \dots \dots (3)$$

यदि अ, को अत्यल्प मानें अर्थात् अ, = 0 तो

$$\text{का} = \int_0^\infty \frac{\text{कोज्याअ,य}}{१ + \text{य}^२} \text{ताय} = \int_0^\infty \frac{\text{ताय}}{१ + \text{य}^२} = \frac{\pi}{२} = \text{आ}$$

$$\text{इस लिये (३) से का} = \frac{\pi}{२} \text{ इ } e^{-a_1}$$

यदि अ, ऋण हो तो (३) से का = $\frac{\pi}{२} \text{ इ } e^{a_1}$ ऐसा होगा और २१९ वें प्रक्रम की युक्ति से आ = $-\frac{\pi}{२}$

२२७ २२६ प्रक्रम से सिद्ध हुआ है कि

$$\int_0^\infty \frac{\text{कोज्याअ,यताय}}{१ + \text{य}^२} = \frac{\pi}{२} \text{ इ } e^{-a_1} \text{ इसका अ, के वश तात्कालिक}$$

सम्बन्ध निकालने से

$$\int_0^\infty \frac{\text{यज्याअ,यताय}}{१ + \text{य}^२} = \frac{\pi}{२} \text{ इ } e^{-a_1} \text{ और चलानयन कर मान अ, के ०, ग के}$$

मान के भीतर ले आवें तो

$$\int_0^\infty \frac{\text{ज्याय}}{\text{य}(१ + \text{य}^२)} \text{ताय} = \frac{\pi}{२} (१ - \text{इ } e^{-a_1})$$

२२८। खण्डचलानयन से सिद्ध है कि

$$\int e^{-अय} \text{ज्याअ,य ताय} = -e^{-अय} \cdot \frac{अज्याअ,य + अ,य \text{कोज्याअ,य}}{अ^२ + अ,य^२}$$

$$\text{और } \int e^{-अय} \text{कोज्याअ,य ताय} = e^{-अय} \frac{अ,य \text{ज्याअ,य} - अ \text{कोज्याअ,य}}{अ^२ + अ,य^२}$$

$$\text{इन पर से } \int_0^{\infty} e^{-अय} \text{ज्या अ,य ताय} = \frac{अ,य}{अ^२ + अ,य^२}$$

$$\text{और } \int_0^{\infty} e^{-अय} \text{कोज्या अ,य ताय} = \frac{अ}{अ^२ + अ,य^२} \text{ । यदि अ धनात्मक हो ।}$$

इन में यदि अ = ० तो

$$\int_0^{\infty} \text{ज्या अ,य ताय} = \frac{अ,य}{अ,य^२} = \frac{१}{अ,य}$$

$$\text{और } \int_0^{\infty} \text{कोज्याअ,य ताय} = ०$$

$$\text{परन्तु } \int \text{ज्याअ,य ताय} = - \frac{\text{कोज्याअ,य}}{अ,य}$$

$$\text{और } \int \text{कोज्याअ,य ताय} = \frac{\text{ज्याअ,य}}{अ,य}$$

इसलिये

$$\int_0^{\infty} \text{ज्याअ,य} = - \text{कोज्या} (\infty) + \frac{१}{अ,य} = \frac{१}{अ,य}$$

$$\therefore \text{कोज्या} (\infty) = ०$$

$$\text{और } \int_0^{\infty} \text{कोज्याअ,य ताय} = \text{ज्या} (\infty) + ० = ०$$

$$\therefore \text{ज्या} (\infty) = ०$$

इन पर से यह सिद्ध होता है कि यदि कोण का मान अनन्त हो तो उस की ज्या और कोटिज्या दोनों शून्य के समान होती है यह अत्यन्त चमत्कार है । इस पर गणितज्ञों ने बहुत ही विचार किया है जिसका वर्णन इस चलराशिकलन की पुस्तक में विद्यार्थियों के लिये दुर्बोध कारक है । मेरी समझ में जिस अनन्त कोण के मान में ज्या शून्य होती है उसी अनन्त कोण के मान में कोटिज्या

शून्य के तुल्य नहीं होती है किन्तु दोनों अनन्त कोणों के मानों का अन्तर अवश्य $2m\pi \pm \frac{\pi}{2}$ इस के तुल्य होगा जहाँ m कोई अभिन्न संख्या है ।

२२९। फल का विस्तर रूप बना कर भी कहीं कहीं सान्तचल का मान निकल आता है । जैसा कि २२२ प्रक्रम में दिखलाया है उसी चाल के कुछ और उदाहरण दिखलाते हैं ।

$$\text{यदि ला } \left\{ 1 - a \sqrt{1 - y} \right\} \text{ और ला } \left\{ 1 + a \sqrt{1 - y} \right\}$$

इन दोनों का विस्तृत मान ले आकर जोड़ डालो तो

$$\text{ला } (1 - 2 \text{ अकोज्याय} + a^2)$$

$$= -2 (\text{अकोज्याय} + \frac{a^2}{2} \text{ कोज्या२य} + \frac{a^2}{3} \text{ कोज्या३य} + \dots)$$

यहाँ यदि $a < 1$ तो श्रेणी का मान सान्त होगा

$$\text{इस लिये } \int \text{ ला } (1 - 2 \text{ अकोज्याय} + a^2) \text{ ताय}$$

$$= -2 (\text{अज्याय} + \frac{a^2}{2} \text{ ज्या२य} + \frac{a^2}{3} \text{ ज्या३य} + \dots)$$

$$\text{और } \int_0^{\pi} \text{ लां } (1 - 2 \text{ अकोज्याय} + a^2) \text{ ताय} = 0$$

$$\text{यदि } a > 1 \text{ तो ला } (1 - 2 \text{ अकोज्याय} + a^2)$$

$$= \text{ला} a^2 + \text{ला } (1 - \frac{2}{a} \text{ कोज्याय} + \frac{1}{a^2})$$

इस लिये अब ऊपर युक्ति से $\frac{1}{a} < 1$ इस लिये दूसरे खण्ड का मान शून्य निकलेगा और पहले का $\pi \text{ ला} a^2 = 2 \pi \text{ ला} a$ यह जो कि अभीष्ट मान होगा ।

$$\text{यदि } a = 1 \text{ तो } \int \text{ ला } (1 - 2 \text{ अकोज्याय} + a^2) \text{ ताय}$$

$$= \int \text{ ला } \{ 2(1 - \text{अकोज्याय}) \} \text{ ताय} = \int \text{ ला } ज्या^2 \frac{y}{2} \text{ ताय} + \text{ला } 4 \int \text{ ताय}$$

$$= \int 2 \text{ लाज्या } \frac{y}{2} \text{ ताय} + 2 \text{ ला } 2 \int \text{ ताय}$$

$$= 4 \int \text{ लाज्याय } \text{ ताय} + 2 \text{ ला } 2 \int \text{ ताय यदि } y = \frac{y}{2}$$

$$= 4 \int \text{ लाज्याय } \text{ ताय} + 2 y \text{ ला } 2$$

$$\text{इसलिये } \int_0^{\pi} \pi \text{ ला } (1-2\text{अकोज्याय} + \text{अ}^2) \text{ ताय} = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{लाज्याय}^2 \text{ ताय} + 2\pi \text{ला} 2$$

$2\pi \text{ला} \frac{\pi}{2} + 2\pi \text{ला} 2 = 0, 49$ प्रक्रम के (३) उदाहरण से ।

तीनों स्वरूप को यदि एक ही समीकरण से दिखलाया चाहो तो पहले को $\text{ला}(\text{अ}^2 - 2\text{अगकोज्याय} + \text{ग}^2)$ ताय

$$= \text{ला}\text{अ}^2 + \text{ला}(1 - \frac{2\text{ग}}{\text{अ}} \text{कोज्याय} + \frac{\text{ग}^2}{\text{अ}^2}) \text{ ताय ऐसे लिखो यदि } \text{अ} > \text{ग}$$

और यदि $\text{ग} > \text{अ}$ तो $\text{ला}\text{ग}^2 + \text{ला}(1 - \frac{2\text{अ}}{\text{ग}} \text{कोज्याय} + \frac{\text{अ}^2}{\text{ग}^2})$ ताय ऐसे लिखो

$$\text{तब } \int_0^{\pi} \pi \text{ला}(\text{अ}^2 - 2\text{अगकोज्याय} + \text{ग}^2) \text{ ताय} = 2\pi \text{लाज}$$

जहाँ दोनों अ और ग में से जो अधिक है उसका घातक ज है ।

२३०। खण्डचलानयन से $\int \text{ला}(1-2\text{अकोज्याय} + \text{अ}^2) \text{ ताय}$

$$= \text{अ} \cdot \text{ला}(1-2\text{अकोज्याय} + \text{अ}^2) - 2\text{अ} \int \frac{\text{यज्याय ताय}}{1-2\text{अकोज्याय} + \text{अ}^2}$$

इस लिये यदि $\text{अ} < 1$ तो

$$\int_0^{\pi} \frac{\text{ज्याय ताय}}{1-2\text{अकोज्याय} + \text{अ}^2} = \frac{\pi}{2\text{अ}} \text{ला}(1+\text{अ})^2 = \frac{\pi}{\text{अ}} \text{ला}(1+\text{अ})$$

और यदि $\text{अ} > 1$ तो ऊपर के प्रक्रम की युक्ति से

$$\text{इस का मान} = \frac{\pi}{\text{अ}} \text{ला}(1+\text{अ}) - \frac{\pi}{\text{अ}} \text{ला}(\text{अ}) = \frac{\pi}{\text{अ}} \text{ला}(1 + \frac{1}{\text{अ}})$$

२३१। $\int_0^{\pi} \pi \text{कोज्याअ}_1 \text{य ला}(1-2\text{अकोज्याय} + \text{अ}^2) \text{ ताय}$ इस का मान

२२९ प्रक्रम के ऐसा यदि श्रंढी में लाकर चलानयन करो (जहाँ सरल-त्रिकोणमिति से दो कोटिज्याओं के घात को दो कोटिज्या के योग में स्वरूप बना लेना) तो $0, \pi$ सीमा के भीतर सब चलों का मान

उड़ जायगा एक खण्ड केवल $\int_0^{\pi} \pi \frac{\text{अ}_1}{\text{अ}_2} \text{ ताय}$ यह रह जायगा यदि

अ < १ और यदि अ > १ तो उसी प्रक्रम की युक्ति से $\int_0^{\pi} \frac{अ^{-अ_1}}{अ_1}$ यह रह जायगा । इसलिये

$$\int_0^{\pi} \text{कोज्याअ_1य ताय} (१ - २अकोज्याय + अ^२) \text{ ताय}$$

$$= -\frac{\pi अ^{अ_1}}{अ_1}, \text{ वा } -\frac{\pi अ^{-अ_1}}{अ_1} \text{ यदि अ < १ वा अ > १ ।}$$

२३२ । खण्डचलानयन से ऊपर के फल का मान ले आवो तो २३० प्रक्रम की युक्ति से $\int_0^{\pi} \frac{\text{ज्याअ_1य ताय}}{१ - २अकोज्याय + अ^२} = \frac{\pi}{२} अ^{अ_1-१}$ वा $\frac{\pi}{२} अ^{-(अ_1+१)}$ यदि अ < १ वा अ > १ ।

२३३ । चलनकलन के ३१४ वें प्रक्रम के अन्त में जो समीकरण उत्पन्न हुआ है उसे २अ से गुण कर १ में जोड़ देने से

$$\frac{१ - अ^२}{१ - २अकोज्याय + अ^२} = १ + २अकोज्याय + २अ^२कोज्या२य$$

$$+ २अ^३कोज्या३य + \dots$$

इस में यदि अ < १ तो इस पर से भी बहुत सान्तचलों का ज्ञान हो सकता है जैसे यदि अ_१ अभिन्न हो तो

$$\int_0^{\pi} \frac{\text{कोज्याअ_1य ताय}}{१ - २अकोज्याय + अ^२} = \frac{\pi अ^{अ_1}}{१ - अ^२}$$

क्योंकि श्रेणियों के सीमा के भीतर प्रत्येक पद के सान्तचल नष्ट हो जाँयगे केवल $\frac{२अ^{अ_1}}{१ - अ^२} \int \text{कोज्या}^२\text{अ_1य ताय}$ यह रह जायगा जिस का मान सीमा के भीतर $\frac{\pi अ^{अ_1}}{१ - अ^२}$ यह होगा ।

२३४ । $\int_0^{\infty} \frac{१}{१ + य^२} \frac{\text{ताय}}{१ - २अकोज्याय + अ^२}$ इस में भी यदि श्रेणी

२४

में $\frac{1}{1-2\text{अकोज्यागय} + \text{अ}^2}$ इस का मान ले आये तो

$$\frac{1}{1-\text{अ}^2} \left[\frac{1}{1+\text{य}^2} + \frac{2\text{अकोज्यागय}}{1+\text{य}^2} + \frac{2\text{अ}^2\text{कोज्या}^2\text{गय}}{2+\text{य}^2} + \dots \right] \text{ऐसा होगा}$$

इस लिये सीमा के भीतर प्रत्येक पद सम्बन्धि चलों का मान २२६ प्रक्रम के (३) समीकरण से ले आकर योग करने से अभीष्ट सान्तचल का मान

$$\pi \cdot \frac{1}{1-\text{अ}^2} \cdot \frac{1+\text{अइ}^{-\text{ग}}}{1-\text{अइ}^{-\text{ग}}} \text{ यह होगा ।}$$

$$२३५ । \text{ इसी तरह } \int_0^{\infty} \frac{\text{ला}(1-2\text{अकोज्यागय} + \text{अ}^2) \frac{\text{ताय}}{1+\text{य}^2}}{\dots}$$

$$= \pi \text{ला}(1-\text{अइ}^{-\text{ग}}) \text{ २२६ और २२९ प्रक्रम की युक्ति से ।}$$

२३६ । चलनकलन के ३१४वें प्रक्रम में उपान्तिम समीकरण जो उत्पन्न हुआ है उस में $\text{य}=\text{र}$ तुल्य मान पीछे से य के स्थान में गय का उत्थापन दे देने से

$$\frac{\text{ज्यागय}}{1-2\text{अकोज्यागय} + \text{य}^2} = \text{ज्यागय} + \text{अज्या}^2\text{गय} + \text{अ}^2\text{ज्या}^3\text{गय} + \dots$$

जहाँ $\text{अ} < 1$ इस श्रेणी और २२७ प्रक्रम से

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{यज्यागयताय}}{1-2\text{अकोज्यागय} + \text{य}^2} = \frac{\pi}{2(\text{इ}^{\text{ग}}-\text{अ})}$$

यदि ग के वश से तात्कालिक सम्बन्ध निकालो तो २३५ प्रक्रम से भी यह सिद्ध होता है ।

२३७। यदि $\text{स} = \text{कोज्याय} + \sqrt{-1}$ ज्याय तो $\text{फ}(\text{अ}+\text{स})$ यह यदि ऐसा हो कि इसमें यदि टेलर का सिद्धान्त लगाया जाय तो व्यभिचार न हो

$$\text{तो टेलर के सिद्धान्त से } \text{फ}(\text{अ}+\text{स}) + \text{फ}(\text{अ}+\text{स}^{-1})$$

$$= 2 \left\{ \text{फ}(\text{अ}) + \text{फ}'(\text{अ}) \text{कोज्याय} + \frac{\text{फ}''(\text{अ})}{2} \text{कोज्या}^2\text{य} + \dots \right\}$$

$$\text{और } \frac{1-\text{ग}^2}{1-2\text{गकोज्याय} + \text{ग}^2}$$

$$= 1 + 2\text{गकोज्याय} + 2\text{ग}^2\text{कोज्या}^2\text{य} + 2\text{ग}^3\text{कोज्या}^3\text{य} + \dots$$

$$\text{इस लिये } \int_0^{\pi} \frac{f(x+s) + f(x+s^{-1})}{1-2g\cos s + g^2} \text{ ताय}$$

$$= \frac{2\pi}{1-g^2} \left\{ f(x) + gf'(x) + \frac{g^2}{2} f''(x) + \dots \right\} = \frac{2\pi}{1-g^2} f(x+g)$$

जहाँ $g < 1$

इसी तरह दोनों फलों का अन्तर करने से

$$\int_0^{\pi} \frac{f(x+s) - f(x+s^{-1})}{1-2g\cos s + g^2} \text{ ताय}$$

$$= \frac{\pi\sqrt{-1}}{g} \left\{ f(x+g) - f(x) \right\}$$

$$\text{और } \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos s}{1 - 2g\cos s + g^2} \left\{ f(x+s) + f(x+s^{-1}) \right\} \text{ ताय}$$

$$= \left\{ f(x+g) + f(x) \right\} \pi$$

२३८। इस तरह असम्भाव्य संख्या का भी उत्थापन देने से बहुत सान्त-चलों का मान आ जाता है। जैसे

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} \text{ ताय} = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \text{ यह जो २१२ प्रक्रम से सिद्ध है इस में}$$

यदि a के स्थान में $\frac{1 + \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$ g इसका उत्थापन दें तो

$$\int_0^{\infty} e^{-g^2 x^2 \sqrt{-1}} \text{ ताय} = \int_0^{\infty} \{ \cos^2 x - \sqrt{-1} \sin^2 x \} \text{ ताय}$$

$$= \int_0^{\infty} \cos^2 x \text{ ताय} - \sqrt{-1} \int_0^{\infty} \sin^2 x \text{ ताय} = \frac{1}{g} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{-1}} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1 - \sqrt{-1}}{2g} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$$

यहाँ पर सम्भाव्य असम्भाव्य को अलग अलग समान करने से

$$\int_0^{\infty} \cos^2 x \text{ ताय} = \frac{\sqrt{\pi}}{2g\sqrt{2}}$$

$$\text{और } \int_0^{\infty} \sin^2 x \text{ ताय} = \frac{\sqrt{\pi}}{2g\sqrt{2}}$$

इसी में यदि ग'य' के स्थान में र रख लें तो ताय = $\frac{\text{तार}}{२ग'य} = \frac{\text{तार}}{२ग\sqrt{१-ग'ज्या'प}}$

इस लिये

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{कोज्या'रतार}}{\sqrt{१-ग'ज्या'प}} = \int_0^{\infty} \frac{\text{ज्या'र तार}}{\sqrt{१-ग'ज्या'प}} = \sqrt{\frac{\pi}{३}}$$

इस तरह से हजारहों सान्तचल बुद्धिमानों के बुद्धिवल से निकले हुए हैं और निकलते जाते हैं कहीं तक लिख कर दिखलावें बुद्धिमानों के लिये इतना ही बहुत है। इस पुस्तक के लिखने से मेरा यही तात्पर्य है कि चलराशि सम्बन्धि प्रायः सब विषयों से थोड़ा बहुत विद्यार्थियों का परिचय हो जाय ।

$$२३९। \int \frac{\text{ताष}}{\sqrt{(१-ग'ज्या'प)}} = \text{दै}_१(ग,प)। \int \sqrt{(१-ग'ज्या'प)} \text{ताष} \\ = \text{दै}_३(ग,ष) \text{ और}$$

$$\int \frac{\text{ताष}}{(१+अज्या'ष)\sqrt{(१-ग'ज्या'प)}} = \text{दै}_३(ग,अ,प) \text{ ऐसा मान लो जहाँ}$$

ग < १ तो यदि

$$\text{दै}_३(ग,ष) + \text{दै}_३(ग,ष_२) = \text{दै}_३(ग,इ_२) \quad \text{जहाँ इ}_२ \text{ एक स्थिराङ्क है तो}$$

$$\text{कोज्या'प कोज्या'ष_२} - \text{ज्या'षज्या'ष_२} \sqrt{(१-ग'ज्या'इ_२)} = \text{कोज्या'इ}_२ \text{ ऐसा होगा ।}$$

इस को सिद्ध करने के लिये मान लो कि ष और ष_२, ये दोनों नये चलराशि ट के फल हैं तो दिये हुए समीकरण का नये चलराशि के वरा तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$\frac{१}{\sqrt{(१-ग'ज्या'प)}} \frac{\text{ताष}}{\text{ताट}} + \frac{१}{\sqrt{(१-ग'ज्या'प_२)}} \cdot \frac{\text{ताष_२}}{\text{ताट}} = ० \dots (१)$$

$$\text{कल्पना करो कि ट ऐसा है जिस से } \frac{\text{ताष}}{\text{ताट}} = \sqrt{(१-ग'ज्या'प)}$$

$$\text{तो (१) समीकरण से } \frac{\text{ताष_२}}{\text{ताट}} = -\sqrt{(१-ग'ज्या'प_२)}$$

दोनों का वर्ग कर तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$\frac{\text{ता'ष}}{\text{ताट}^२} = -ग'ज्या'षकोज्या'ष, \quad \frac{\text{ता'ष_२}}{\text{ताट}^२} = -ग'ज्या'ष_२कोज्या'ष_२$$

इनके योगान्तर से

$$\frac{\text{ता'ष}(\pm\text{ष_२})}{\text{ताट}^२} = -\frac{ग^२}{२}(\text{ज्या'२ष} \pm \text{ज्या'२ष_२})$$

यदि $\phi + \phi_2 = \text{फि}$, $\phi - \phi_2 = \text{फी}$ तो

$$\frac{\text{ता}^{\text{फि}}}{\text{ताट}^2} = - \text{ग}^{\text{ज्याफिकोज्याफी}}, \quad \frac{\text{ता}^{\text{फी}}}{\text{ताट}^2} = - \text{ग}^{\text{ज्याफीकोज्याफि}}$$

और $\frac{\text{ताफि}}{\text{ताट}} \frac{\text{ताफी}}{\text{ताट}} = \left(\frac{\text{ता}\phi}{\text{ताट}}\right)^2 - \left[\frac{\text{ता}\phi}{\text{ताट}}\right]^2 = - \text{ग}^{\text{ज्याफिज्याफी}}$

इस लिये $\frac{\text{ता}^{\text{फि}}}{\text{ताट}^2} = \text{कोस्पफी}$, $\frac{\text{ता}^{\text{फी}}}{\text{ताट}^2} = \text{कोस्पफि}$
 $\frac{\text{ताफि}}{\text{ताट}} \frac{\text{ताफी}}{\text{ताट}} = \text{कोस्पफी}$, $\frac{\text{ताफि}}{\text{ताट}} \frac{\text{ताफी}}{\text{ताट}} = \text{कोस्पफि}$

इस लिये

$$\frac{\text{ता}}{\text{ताट}} \left(\text{ला} \frac{\text{ताफि}}{\text{ताट}}\right) = \frac{\text{ता}}{\text{ताट}} \text{लाज्याफी}, \quad \frac{\text{ता}}{\text{ताट}} \left(\text{ला} \frac{\text{ताफी}}{\text{ताट}}\right) = \frac{\text{ता}}{\text{ताट}} \text{लाज्याफि}$$

इस लिये $\text{ला} \frac{\text{ताफि}}{\text{ताट}} = \text{लाज्याफी} + \text{स्थिराङ्क}$

इस लिये $\frac{\text{ताफि}}{\text{ताट}} = \text{आ} \cdot \text{ज्याफी}$ }
 और इसी तरह $\frac{\text{ताफी}}{\text{ताट}} = \text{का} \cdot \text{ज्याफि}$ }(२)

जहाँ आ और का स्थिराङ्क है ।

इस कारण से आज्याफी $\frac{\text{ताफी}}{\text{ताट}} = \text{काज्याफि} \frac{\text{ताफि}}{\text{ताट}}$

चलानयन से, आकोज्याफी = काकोज्याफी + स्थिराङ्क (३)

और प्रथम मूल समीकरण से स्पष्ट देख पड़ता है कि यदि $\phi_2 = 0$ तो

$$\text{दै}_1(\text{ग}, \phi) = \text{दै}_2(\text{ग}, \text{इ}_1)$$

इस लिये तब $\phi = \text{इ}_1$ और $\text{फि} = \text{फी} = \text{इ}_1$

(३) से (आ - का) कोज्याइ_१ = स्थि

इस लिये आकोज्या($\phi - \phi_2$) = काकोज्या ($\phi + \phi_2$) + (आ - का) कोज्याइ_१

और (आ - का) कोज्या ϕ कोज्या ϕ_2 + (आ + का) ज्या ϕ ज्या ϕ_2
 = (आ-का) कोज्याइ_१ (४)

(२) में $\frac{\text{ताफि}}{\text{ताट}} = \sqrt{(1 - \text{ग}^{\text{ज्या}^2\phi})} - \sqrt{(1 - \text{ग}^{\text{ज्या}^2\phi_2})}$ इस का

और $\frac{\text{ताफी}}{\text{ताट}} = \sqrt{(1 - \text{ग}^{\text{ज्या}^2\phi})} + \sqrt{(1 - \text{ग}^{\text{ज्या}^2\phi_2})}$ इस का

उत्थापन देने से और $\phi_2 = 0$ मानने से

$$\sqrt{(१-गंज्यांइ_१)}-१ = आज्याइ_१$$

$$\text{और } \sqrt{(१-गंज्यांइ_१)}+१ = काज्याइ_१$$

$$\therefore \frac{२\sqrt{(१-गंज्यांइ_१)}}{ज्याइ_१} = आ+का, \quad | - \frac{२}{ज्याइ_१} = आ-का$$

इसका उत्पादन (४) में देने से

$$\begin{aligned} & \text{कोज्याषकोज्याष_१} - ज्यापज्याष_१ \sqrt{(१-गंज्यांइ_१)} \\ & = \text{कोज्याइ_१ यह सिद्ध हुआ} \end{aligned}$$

२४० । २३९ प्रक्रम में जो सिद्धान्त उत्पन्न हुआ है उस में यदि समशोधन कर वर्ग कर डालो तो

$$(\text{कोज्याषकोज्याष_१} - \text{कोज्याइ_१})^२ = (१-गंज्यांइ_१)ज्यांषज्यांष_१$$

इस लिये

$$\begin{aligned} & \text{कोज्यांषकोज्यांष_१} - २\text{कोज्याइ_१कोज्याषकोज्याष_१} + \text{कोज्यांष_१} \\ & = ज्यांषज्यांष_१ - गंज्यांइ_१ज्यांषज्यांष_१ \text{ और ज्यांष} + \text{कोज्यांष} = १ \end{aligned}$$

इस लिये

$$\begin{aligned} & ज्यांष - ज्यांषज्यांष_१ + \text{कोज्यांष} + \text{कोज्यांषकोज्यांष_१} \\ & - २\text{कोज्याइ_१कोज्याषकोज्याष_१} + \text{कोज्यांइ_१} \\ & = ज्यांषकोज्यांष_१ + \text{कोज्यांषकोज्यांष_१} + \text{कोज्यांष} \\ & - २\text{कोज्याइ_१कोज्याषकोज्याष_१} + \text{कोज्यांइ_१} \\ & = \text{कोज्यांष} + \text{कोज्यांष_१} + \text{कोज्यांइ_१} - २\text{कोज्याइ_१कोज्याषकोज्याष_१} \\ & = १ - गंज्यांइ_१ज्यांषज्यांष_१ \end{aligned}$$

कोज्यांषकोज्यांइ_१ जोड़ कर पक्षान्तरानयन करने से

$$\begin{aligned} & (\text{कोज्याष} - \text{कोज्याषकोज्याइ_१})^२ \\ & = १ - \text{कोज्यांष_१} - \text{कोज्यांइ_१} + \text{कोज्यांषकोज्यांइ_१} \end{aligned}$$

$$- गंज्यांइ_१ज्यांषज्यांष_१$$

$$= ज्यांषकोज्यांइ_१ (१ - गंज्यांष)$$

इस लिये कोज्याप = कोज्याषकोज्याइ_१ + ज्यापज्याइ_१ $\sqrt{(१ - गंज्यांष)}$

यहाँ पर धनात्मक मूल लिया है क्योंकि जब ष = ० तो यहाँ ष_१ = इ_१

२४१। दै_१(ग,ष) इस का रूप ग,ष के बदलने से इसी चाल का हो जाता है केवल स्थिराङ्क गुणक अधिक हो जाता है जैसे यदि

$$\text{स्पष} = \frac{\text{ज्या२ष_१}}{\text{ग} + \text{कोज्या२ष_१}} \text{ तो ष_१ के वश तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से}$$

$$\frac{१}{\text{कोज्या}^२\phi} \frac{\text{ताष}}{\text{ताष}_२} = \frac{२(१ + \text{गकोज्या}^२\phi_२)}{(\text{ग} + \text{कोज्या}^२\phi_२)^२}$$

इस लिये $\frac{\text{ताष}}{\text{ताष}_२} = \frac{२(१ + \text{गकोज्या}^२\phi_२)}{१ + २\text{गकोज्या}^२\phi_२ + \text{ग}^२}$

और $१ - \text{ग}^२\text{ज्या}^२\phi = १ - \frac{\text{ग}^२\text{ज्या}^२\phi_२}{१ + २\text{गकोज्या}^२\phi_२ + \text{ग}^२}$
 $= \frac{१ + २\text{गकोज्या}^२\phi_२ + \text{ग}^२\text{कोज्या}^२\phi_२}{१ + २\text{गकोज्या}^२\phi_२ + \text{ग}^२}$

इस लिये $\int \frac{\text{ताष}}{\sqrt{(१ - \text{ग}^२\text{ज्या}^२\phi)}}$
 $= \int \frac{२(१ + \text{गकोज्या}^२\phi_२)}{१ + २\text{गकोज्या}^२\phi_२ + \text{ग}^२} \cdot \frac{\sqrt{(१ + २\text{गकोज्या}^२\phi_२ + \text{ग}^२)}}{१ + \text{गकोज्या}^२\phi_२} \text{ताष}_२$
 $= २ \int \frac{\text{ताष}_२}{\sqrt{(१ + २\text{गकोज्या}^२\phi_२ + \text{ग}^२)}} = २ \int \frac{\text{ताष}_२}{\sqrt{(१ + २\text{ग} - ४\text{गज्या}^२\phi_२ + \text{ग}^२)}}$
 $= \frac{२}{१ + \text{ग}} \int \frac{\text{ताष}_२}{\sqrt{\left\{ १ - \frac{४\text{ग}}{(१ + \text{ग})^२} \text{ज्या}^२\phi_२ \right\}}}$

यहाँ पर कोई स्थिराङ्क जोड़ने की आवश्यकता नहीं है क्योंकि यदि $\phi = ०$ तो $\phi_२ = ०$ होता है ।

अब ऊपर के चल में यदि $\text{ग}_२ = \frac{४\text{ग}}{(१ + \text{ग})^२}$ तो

$$\text{दै}_२(\text{ग}, \phi) = \frac{२}{१ + \text{ग}} \text{दै}_२(\text{ग}_२, \phi_२)$$

पहले जो स्पष्ट $= \frac{\text{ज्या}^२\phi_२}{\text{ग} + \text{कोज्या}^२\phi_२}$ ऐसा माना है इस पर से सिद्ध कर सकते हो कि $\text{गज्या}^२\phi = \text{ज्या}^२(\phi_२ - \phi)$

और जब $\text{ग}_२ = \frac{४\text{ग}}{(१ + \text{ग})^२} \therefore \frac{\text{ग}_२}{\text{ग}^२} = \frac{४}{\text{ग}(१ + \text{ग}^२)}$

परन्तु $\text{ग} < १$ इस लिये $४ > \text{ग}(१ + \text{ग}^२)$ और $\text{ग}_२ > \text{ग}^२ \therefore \text{ग}_२ > \text{ग}$
 इस लिये ग से $\text{ग}_२$ बड़ा ठहरा ।

इस में यदि $\phi_२ = \frac{\pi}{३}$ तो $\phi = \pi$ इस लिये

$$\text{दै}_२(\text{ग}, \pi) = \frac{२}{१ + \text{ग}} \text{दै}_२(\text{ग}, \frac{\pi}{३}) = २ \text{दै}_२(\text{ग}, \frac{\pi}{३}) \dots$$

दै_१ (ग,प) इस में ग को मध्यस्थ, और प को अग्रांश कहते हैं और दै_१ (ग,प) = ० यदि प = ० और यदि प = $\frac{\pi}{३}$ तो पूर्णचल का मान = दै_१ (ग, $\frac{\pi}{३}$) यह है। इस लिये $\frac{\pi}{३}$ को पूर्ण अग्रांश कहते हैं।

यदि ७७ वें प्रक्रम के साथ तुलना करो तो जान पड़ेगा कि दै_१ (ग,प) यह लघुव्यासाग्र से चाप की गणना करें तो दीर्घवृत्त के चाप को प्रकाश करता है और आगे के प्रक्रमों से जान पड़ेगा कि दै_१ (ग, प), दै_२ (ग,प) और दै_३ (अ, ग, प,) इन तीनों में परस्पर सम्बन्ध है इस लिये इन तीनों को क्रम से प्रथम, द्वितीय और तृतीय दैर्घवृत्तीय चल कहते हैं।

यद्यपि इन तीनों के ठीक ठीक मान नहीं निकलते तथापि इन के अव्यक्त मानों के सम्बन्ध से अनेक सिद्धान्त उत्पन्न होते हैं। इन के सिद्धान्तों पर बुद्धिमानों ने अलग एक स्वतन्त्र दैर्घवृत्तीयचल के नाम से पुस्तक ही बना डाली है। अर्भी सन् १८७३ ई० में ब्रिअट (Briot) और बौक्रेट (Bouquet) ने इसी विषय के पुस्तक का एक बड़ा भारी प्रथम खण्ड प्रकाश किया है।

तीसरे दैर्घवृत्तीयचल में जो अ, एक और थिराङ्क है उसे परिमिति कहते हैं और सर्वत्र ग सर्वदा १ से कम माना गया है।

२४१। इस प्रक्रम में एक सिद्धान्त दिखलाते हैं जो प्रथम और द्वितीय दैर्घवृत्तीयचल के सम्बन्ध से उत्पन्न होता है।

२३९ प्रक्रम में सिद्ध हुआ है कि यदि दै_१ (ग,प) + दै_१ (ग,प_१) = दै_१ (ग, इ_१) तो

कोज्याषकोज्याप_१ - ज्यापज्याप_१ $\sqrt{(१ - गज्याइ_१)}$ = कोज्याइ_१
अब दिखलाते हैं कि

यदि कोज्याषकोज्याप_१ - ज्यापज्याप_१ $\sqrt{(१ - गज्याइ_१)}$ = कोज्याइ_१

तो दै_२ (ग,ष) + दै_२ (ग,ष_१) - दै_२ (ग,इ_१)

= गज्याष ज्याप_१ ज्याइ_१ ऐसा होगा।

यहाँ दिये हुए समीकरण के धर्म से स्पष्ट है कि ष_१ यह ष का कोई फल होगा

इस लिये मानो कि, दै_२ (ग,ष) + दै_२ (ग,ष_१) - दै_२ (ग,इ_१) = फ(ष)

इसका तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

फ'(ष) = $\sqrt{(१ - गज्याष)}$ + $\sqrt{(१ - गज्याष_१)}$ $\frac{ताष_१}{ताष}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\text{कोज्याप} - \text{कोज्याप}_1 \text{कोज्याइ}_1}{\text{ज्याप}_1 \text{ज्याइ}_1} \\
 &+ \frac{\text{कोज्याप}_1 - \text{कोज्यापकोज्याइ}_1}{\text{ज्यापज्याइ}_1} \frac{\text{ताप}_1}{\text{ताप}} \quad (२४० \text{ प्रक्रम से}) \\
 &= \frac{\text{ता}}{\text{ताप}} \{ \text{ज्या}^1 \text{प} + \text{ज्या}^1 \text{प}_1 + २ \text{कोज्यापकोज्याप}_1 \text{कोज्याइ}_1 \} \\
 &\times \frac{१}{२\text{ज्यापज्याप}_1 \text{ज्याइ}_1}
 \end{aligned}$$

परन्तु $\text{ज्या}^1 \text{प} + \text{ज्या}^1 \text{प}_1 + २\text{कोज्यापकोज्याप}_1 \text{कोज्याइ}_1$
 $= १ + \text{कोज्या}^1 \text{इ}_1 + \text{ग}^1 \text{ज्या}^1 \text{पज्या}^1 \text{प}_1 \text{ज्या}^1 \text{इ}_1$ (२४० ही प्रक्रम से)

इसलिये $\text{फ}^1(\text{प}) = \text{ग}^1 \text{ज्याइ}_1 \frac{\text{ता}(\text{ज्यापज्याप}_1)}{\text{ताप}}$

इस लिये चलानयन से

$$\text{फ}(\text{प}) = \text{ग}^1 \text{ज्याइ}_1 \text{ज्यापज्याप}_1$$

स्थिराङ्क जोड़ने की कुछ आवश्यकता नहीं है क्योंकि जब $\text{प} = ०$ तो

$$\text{फ}(\text{प}) = ० \text{ इस लिये}$$

$$\text{द्वै}(\text{ग}, \text{प}) + \text{द्वै}(\text{ग}, \text{प}_1) - \text{द्वै}(\text{ग}, \text{इ}_1) = \text{फ}(\text{प}) = \text{ग}^1 \text{ज्यापज्याप}_1 \text{ज्याइ}_1$$

$$\text{इस में यदि } \text{इ}_1 = \frac{\pi}{2} \text{ तो } \text{फ}(\text{प}) = \text{ग}^1 \text{ज्यापज्याप}_1,$$

और दिये हुए समीकरण का रूप

$$\text{कोज्यापकोज्याप}_1 - \text{ज्यापज्याप}_1 \sqrt{(१ - \text{ग}^1 \text{ज्या}^1 \text{इ}_1)}$$

$$= \text{कोज्यापकोज्याप}_1 - \text{ज्यापज्याप}_1 \sqrt{(१ - \text{ग}^2)} = \text{कोज्याइ}_1 = ०$$

यह ठीक फ्यागननी (Fagnani) के सिद्धान्त के समान फल को दिखलाता है क्योंकि ८५ प्रक्रम के (१) उदाहरण के अन्त में जो

$$\text{इ}^1 \text{य}^1 \text{य}^1 - \text{अ}^1 (\text{य}^1 + \text{य}^1) + \text{अ}^1 = ० \text{ यह समीकरण उत्पन्न हुआ है इस में}$$

$$\text{य}, \text{य}^1 \text{ का जो क्रम से } \frac{\text{अकोज्याप}}{\sqrt{(१ - \text{इ}^1 \text{ज्या}^1 \text{प})}} \text{ , } \frac{\text{अकोज्याप}^1}{\sqrt{(१ - \text{इ}^1 \text{ज्या}^1 \text{प}^1)}}$$

मान मान लो तो

$$\begin{aligned}
 &\text{इ}^1 \text{कोज्या}^1 \text{पकोज्या}^1 \text{प}^1 - \text{कोज्या}^1 \text{प}(१ - \text{इ}^1 \text{ज्या}^1 \text{प}^1) - \text{कोज्या}^1 \text{प}^1(१ - \text{इ}^1 \text{ज्या}^1 \text{प}) \\
 &+ (१ - \text{इ}^1 \text{ज्या}^1 \text{प})(१ - \text{इ}^1 \text{ज्या}^1 \text{प}^1) = ०,
 \end{aligned}$$

अर्थात् $इ^2 ज्या^2 प ज्या^2 प + इ^2 (१ - ज्या^2 प - ज्या^2 प - ज्या^2 प ज्या^2 प) + ज्या^2 प + ज्या^2 प = ०$ अर्थात्

$$इ^2 (इ^2 - १) ज्या^2 प ज्या^2 प + (इ^2 - १) (१ - ज्या^2 प - ज्या^2 प) = ०$$

$(इ^2 - १)$ का भाग दे देने से

$$इ^2 ज्या^2 प ज्या^2 प + १ - ज्या^2 प - ज्या^2 प = ०$$

इस पर से रूपान्तर करने से

$$कोज्यापकोज्याप = ज्यापज्याप \sqrt{१ - इ^2}$$

$$\text{अथवा, } ज्या^2 प = \frac{\text{कोज्या}^2 प}{१ - इ^2 ज्या^2 प}$$

$$\text{और } ज्या^2 प = \frac{\text{कोज्या}^2 प}{१ - इ^2 ज्या^2 प}$$

इस प्रकार से प्रथम और द्वितीय दैर्घवृत्तीयचल के सम्बन्ध से सैकड़ों सिद्धान्त बन जाते हैं ।

$$\begin{aligned} २४३। \text{ दै}_३ (अ, ग, प) &= \int \frac{\text{ताप}}{(१ + अज्या^2 प) \sqrt{(१ - ग^2 ज्या^2 प)}} \\ &= \frac{\text{दै}_३(ग, प)}{१ + अज्या^2 प} - \int \text{दै}_३ (ग, प) \text{ ता} \left(\frac{१}{१ + अज्या^2 प} \right) \end{aligned}$$

इस प्रकार से खण्डचलानयन की रीति से जो $\text{दै}_३ (अ, ग, प)$ का स्वरूप सिद्ध होता है इससे जान पड़ता है कि $\text{दै}_३ (ग, प)$ और $\text{दै}_३ (अग, प)$ में भी परस्पर सम्बन्ध है ।

लेजेण्ड्र (Legendre.) ने पहले दो दैर्घवृत्तीय चलों के मान जानने के लिये एक सारणी बनाई है और उसमें स्वरूपान्तर से तीसरे का मान जानने के लिये भी विधि लिखा है । सारणी बनाने का मूल प्रकार ३७ प्रक्रम का (५) वाँ उदाहरण है ।

२४४। यदि $f(x)$ किसी खेत में एक तरफ के डाँड़ों का मान हो तो y के स्थान में $अ, अ + च, अ + २च, अ + ३च, \dots अ + (न - १) च$ इनका उत्थापन देने से उस खेत के भीतर उसी तरफ के $f(अ), f(अ + च), f(अ + २च), \dots$ इत्यादि न डाँड़ों के प्रमाण होंगे इस लिये, इन डाँड़ों का मध्यम मान जिसे उर्दू में औसत बोलते हैं ।

साधारण रीति से वा लीलावती में लिखे हुए भास्कराचार्य के “गणयित्वा विस्तारं बहुषु स्थानेषु तद्युतिर्भाज्या । स्थानकमित्या सममिति” इस प्रकार से ।

$$\frac{फ(अ) + फ(अ + च) + फ(अ + २च) + \dots + फ \{ अ + (न - १) च \}}{न}$$

कल्पना करो कि क — अ = नच

इस लिये डाड़ों का मध्यम मान

$$\frac{च [फ(अ) + फ(अ + च) + फ(अ + २च) + \dots + फ \{ अ + (न - १) च \}]}{क - अ}$$

कल्पना करो कि क - अ स्थिर संख्या के भीतर अनन्त स्थानों के डाड़ों का मध्यम मान जानना है तो न का प्रमाण अनन्त और च का मान शून्य हो जायगा ऐसी दशा में २ वा ४० वें प्रक्रमसे डाड़ों का यथार्थ मध्यम मान $\int \frac{क}{अ} फ(य) ताय$ यह होगा क्योंकि औसत में जितने ही स्थानों को बढ़ाते जाते हैं उतना ही औसत सूक्ष्म होता चला जाता है ।

इस लिये य के अ, क के भीतर के मानों में यदि फ(य) का मध्यम मान निकालना हो तो $\int \frac{फ(य)ताय}{क - अ}$ इस का अ, क सीमा के भीतर सान्तचल ले आवो ।

जैसे किसी ने प्रश्न किया कि जिस वृत्त का व्यासार्द्ध ग है उसके परिधि पर एक स्थिर बिन्दु मान कर वहाँ से वृत्तान्तर्गत प्रत्येक बिन्दुओं की दूरी जो होंगी उनका मध्यम मान क्या होगा ।

यहाँ यदि वृत्त के फल का न तुल्य विभाग कर डालें जहाँ $n = \infty$ तो स्पष्ट है कि हर एक विभाग बिन्दु रूप होंगे इसलिये प्रति विभागों की दूरी स्थिर बिन्दु से क्रम से $शु_१, शु_२, शु_३, \dots, शु_n$ यहाँ तो इन का मध्यम मान $\frac{१}{n} (शु_१ + शु_२ + \dots + शु_n)$ यह होगा ।

इसमें अंश हर को $शु \triangle ष \triangle शु$ से गुण देने से

$$\frac{\{ शु_१ + शु_२ + \dots + शु_n \} शु ष शु}{नशु \triangle ष \triangle शु}$$

यहाँ १२५ वें प्रक्रम से $शु \triangle ष \triangle शु$ यह क्षेत्रफल के अत्यल्प विभाग का मान होगा यदि, $\triangle ष, \triangle शु$ ताप, ताशु अर्थात् शून्य के तुल्य हो जायँ ।

९ स्थानों तक Δ^3

य ला.मा. (१ + य) Δ (०) Δ^2 (+) Δ^3 (-) जानने के लिये अङ्क

२६	९५६ ३५९ ११९ ६७०	९३ ३५३ ७६३	५१३ ७२३	५६३ १११ ७७८ ३३३
२७	९५५ ४४८ ६८५ २३४	८८ २४१ ४२७	५०८ १४३	५५४ ९८८ ९५५ २३३
२८	९५४ ५८९ ०७१ ५५३	८३ १८४ ६५६	५०२ ६८०	५३२ ९८८ ६५२ ४२९
२९	९५३ ७७९ ७८१ ०२९	७८ १८२ ०२९	४२७ ३२८	५३१ ८६८ ५३५ ०३८
३०	९५२ ०२० २७७ १५०	७३ २३२ ४५६	४०२ ०८१	५१९ ९८३ ७२४ १२९
३१	९५१ ३१० ०३४ १४१	६८ ३३४ ८८३	४८३ ९३७	५०८ ९६४ ५६२ ३०८
३२	९५० ६४८ ५३६ ५५५	६३ ४८८ २८३	४८१ ८९७	५०१ ७७५ ७३२ १४९
३३	९५१ ०३५ २७९ ४८१	५८ ६९१ ६५६	४७६ ९५१	४८७ ०८३ ८४४ ३०४
३४	९५० ४६९ ७६७ २५४	५३ ९४४ ०३३	४७२ १०२	४८० ६८९ ५४५ ३४९
३५	९४९ ९५१ ५१४ १९१	४८ २४४ ४७६	४६७ ३४९	४७२ ०१० ८४६ ५४०
३६	९४९ ४८० ०४३ ८११	४४ ५९२ ०६५	४६२ ६८४	४६२ २२९ ८९६ ५४४
३७	९४९ ०५४ ८८८ ६२२	३९ ९८५ ९०४	४५८ १०६	४५४ २०१ ०९७ ९४५
३८	९४८ ६७५ ५९० २२३	३५ ४२५ १३१	४५३ ६१५	४४७ ३२२ २०९ ०८७
३९	९४८ ३४१ ६९८ ३६३	३० ९०८ ८९०	४४९ २०६	४३६ ६५२ ५२२ ०१८
४०	९४८ ०५२ ७७१ ४११	२६ ४३६ ३८८	४४४ ८७८	४२९ ६८७ ५४३ ४३२
४१	९४७ ८०८ ३७५ ७८९	२२ ००६ ७२६	४४० ६३०	४२१ २८७ ८८६ ५४४
४२	९४७ ६०८ ०८५ ८२३	१७ ६१९ ३४३	४३६ ४५७	४१४ ०४० ९१८ ८६७
४३	९४७ ४५१ ४८३ ५४२	१३ २७३ २७०	४३२ ३६०	४०७ ४४३ ४२१ ००९
४४	९४७ ३३८ १५८ ४७४	८ ९६७ ८४६	४२८ ३३६	४०० ८५८ ४७२ ५३२
४५	९४७ २६७ ७०७ ४५२	४ ७०२ ३३८	४२४ ३८२	३९२ ००० ८८९ ५७५
४६	९४७ २३९ ७३४ ४३०	— ४७६ ०५२	४२० ४९८	३८५ ३४३ २०१ २८८
४७	९४७ २५३ ८५० ३०२	+ ३७११ ६९८	४१६ ६८२	३७८ ८८४ ६५४ ४२१
४८	९४७ ३०९ ६७२ ७२६	७ ८६१ ५८०	४१२ ९३२	३७४ ००० ८८० ६६६
४९	९४७ ४०६ ८२५ ९५८	११ ९७४ २४४	४०९ २४४	३६५ ५४३ ३१४ ८२९
५०	९४७ ५४४ ९४० ६८३	१६ ०५० ३२४	४०५ ६२०	३५९ ९७८ ६६६ ४५३

श्र	ला०गा(१+श्र)	$\Delta(+)$	$\Delta^2(+)$	$(-)\Delta^2$	९ स्थानों तक Δ^3 जा- (-) नने के लिये अङ्क
.५१	९४७ ७२३ ६५३ ८६२	२०	०९० ४३९	४०२ ०५७	३५३ २४९ १०० ९८७
.५२	९४७ ९४२ ६०८ ५७५	२४	०९५ १९३	३९८ ५५४	३४८ ७५६ ४४४ ५११
.५३	९४८ २०१ ४५३ ८७५	२८	०६५ १७५	३९५ १०९	३४२ २०९ ९९८ ७७६
.५४	९४८ ४९९ ८४४ ६४२	३२	००० ९६१	३९१ ७२०	३३७ ४६४ २५१ २२१
.५५	९४८ ८३७ ४४१ ४४७	३५	९०३ १११	३८८ ३८६	३३१ ७२८ ९५२ ६७४
.५६	९४९ २१३ ९१० ४१०	३९	७७२ १७३	३८५ १०८	३२७ ३३६ १३१ २२९
.५७	९४९ ६२८ ९२३ ०७८	४३	६०८ ६८३	३८१ ८८१	३२९ ००७ ७८७ ६५७
.५८	९५० ०८२ १५६ २८९	४७	४१३ १६५	३७८ ७०५	३२३ ४४५ ११३ २०९
.५९	९५० ५७३ २९२ ०५८	५१	१८६ १२६	३७५ ५८३	३१९ ०७८ ९८५ ७६५
.६०	९५१ १०२ ०१७ ४५०	५४	९२८ ०६८	३७२ ५०७	३०४ ३५४ ३२२ ११०
.६१	९५१ ६६८ ०२४ ४६७	५८	६३९ ४७८	३६९ ४८१	३०२ ९८१ ६८७ ८७४
.६२	९५२ २७१ ००९ ९३८	६२	३२० ८३०	३६६ ५०१	२९६ ५४६ ३१४ ३२०
.६३	९५२ ९१० ६७५ ४०२	६५	९७२ ५९३	३६३ ५६७	२९१ १०९ १६१ ७५८
.६४	९५३ ५८६ ७२७ ०१२	६९	५९५ २२१	३६० ६७८	२८७ ६६५ ४५३ ४३२
.६५	९५४ २९८ ८७५ ४२८	७३	१८९ १५८	३५७ ८३३	२८३ २९२ ३७८ २२७
.६६	९५५ ०४६ ८३५ ७१२	७६	७५४ ८४०	३५५ ०३१	२७९ ६७८ ५६७ ३५४
.६७	९५५ ८३० ३२७ २३८	८०	२९२ ६९३	३५२ २७१	२७४ ३३३ १३० ३९९
.६८	९५६ ६४९ ०७३ ५९६	८३	८०३ १३२	३४९ ५५३	२६९ १९९ ८६८ ७५८
.६९	९५७ ५०२ ८०२ ४९८	८७	२८६ ५६९	३४६ २७३	२६६ ५४६ १५५ ३०४
.७०	९५८ ३९१ २४५ ६९२	९०	७४३ ३९६	३४४ २३४	२६१ ०२० १०८ ०९७
.७१	९५९ ३१४ १३८ ८७२	९४	१७४ ००७	३४१ ६३५	२६१ ६४० ७५६ ५५६
.७२	९६० २७१ २२१ ५९२	९७	५७८ ७०४	३३९ ०७०	२५२ ६१४ ५०२ ३११
.७३	९६१ २६२ २३७ २०६	१००	९५८ ०९९	३३६ ५४५	२५० ०१८ ००७ ८८८
.७४	९६२ २८६ ९३२ ७४१	१०४	३१२ ३२०	३३४ ०५८	२४२ ४५० ६३४ ६३४
.७५	९६३ ३४५ ०५८ ८७४	१०७	६४१ ८०३	३३१ ६०२	२४५ २३३ १३१ १०१

९ स्थानोंतक Δ^3

य ला.गा(१+य) $\Delta(+)$ $\Delta^2[+]$ $\Delta^3[-]$ जानने के लिये अङ्क

.७६	९६४ ४३६ ३६९ ८१०	११० ९४६ ९०१	३२९ १८२	२४१	९९० ८८९ ७८७
.७७	९६५ ५६० ६२३ २६९	११४ २२७ ९५६	३२६ ७९६	२३७	५७६ ४७४ ४४५
.७८	९६६ ७१७ ५८० ३२२	११७ ४८५ ३०६	३२४ ४४३	२३२	३४२ १४० १११
.७९	९६७ ९०७ ००५ ४१२	१२० ७१९ २८०	३२२ १२४	२३०	००८ ०८८ ९७८
.८०	९६९ १२८ ६६६ २४१	१२३ ९३० २०१	३१९ ८३६	२२६	८५७ ५७५ ३६४
.८१	९७० ३८२ ३३३ ७११	१२७ ११८ ३८६	३१७ ५८०	२२४	३४३ ३२२ २१२
.८२	९७१ ६६७ ७८१ ८६४	१३० २८४ १४६	३१५ ३५४	२२१	०१९ ००९ ९७०
.८३	९७२ २८४ ७८७ ८१६	१३३ ४२७ ७८४	३१३ १५८	२१७	८८६ ६९४ ७५६
.८४	९७४ ३३३ १३१ ६९९	१३६ ५४२ ५९८	३१० ९९२	२१४	५५४ ४३३ ४३१
.८५	९७५ ७१२ ५९६ ५९९	१३९ ६४९ ८८१	३०८ ८५६	२१४	०२२ ११९ ११८
.८६	९७७ १२२ ९६८ ४९९	१४२ ७२८ ९२०	३०६ ७४७	२१०	९९९ ७८९ ८६५
.८७	९७८ ५६४ ०३६ २२५	१४५ ७८६ ९९५	३०४ ६६७	२०९	५७६ ५५६ ३६३
.८८	९८० ०३५ ५९१ ३८८	१४८ ८२४ ३८४	३०२ ६६२	२०५	३३४ २३३ १२१
.८९	९८१ ५३७ ४२८ ३३३	१५१ ८४१ ३५५	३०० ५८५	२०३	९२० ००१ ७२६
.९०	९८३ ०६९ ३४४ ०८६	१५४ ८३८ १७३	२९८ ५८५	२०१	७९७ ९६८ ५९६
.९१	९८४ ६३१ १३८ ३००	१५७ ८१५ १०१	२९६ ६०८	१९५	७५५ ६४५ ४५३
.९२	९८६ २२२ ६१३ २११	१६० ७७२ ३९१	२९४ ६५९	१९४	३३४ १४१ २२२
.९३	९८७ ८४३ ५७३ ५८६	१६३ ७१० २९६	२९२ ७३३	१८९	४८१ १०८ २७१
.९४	९८९ ४९३ ८२६ ६७६	१६६ ६२५ ०६१	२९० ८३२	१८७	९८९ ८६८ ७८५
.९५	९९१ १७३ १८२ १७२	१६९ ५२८ ९२६	२८८ ९५७	१८७	५७७ ५५४ ५४५
.९६	९९२ ८८१ ४५२ १५६	१७२ ४१० १३१	२८७ १०३	१८४	४३४ ३३३ २२२
.९७	९९४ ६१८ ४५१ ०६३	१७५ २७२ ९०६	२८५ २७३	१८२	२०३ ९२१ ८११
.९८	९९६ १८३ ९९५ ६३२	१७८ ११७ ४८१	२८३ ४६४	१७७	२७१ ६१६ ०६९
.९९	९९८ ३७७ ९०४ ८६८	१८० ९४४ ०७९	२८१ ६७९	१७७	६९४ ९५६ ६६५
१.००	००० ००० ००० ०००	१८३ ७५२ ९२०	२७९ ९१६	१७५

इस सारणी में (१) ऊर्ध्वाधर कोष्ठ में '०१ वृद्धि से य के मान १'०० तक लिखे हैं। दूसरे में उनके वश से लागा (१ + य) का मान १० आधार में १२ दशमलव स्थानों तक लिखा है गा (१ + य) का मान य के ०,१ के भीतर रूप से अल्प होता है इस लिये इस कोष्ठ में लघुरिक्थ के मान में पूर्णाङ्क को छोड़ दिया है पूर्णाङ्क सर्वत्र अपने मन से—१ वा इस में १० जोड़ कर ९ समझ लेना चाहिये। प्रायः ९ पूर्णाङ्क ही ग्रहण करना उत्तम है जैसा कि त्रिकोणमिति फलों के लघुरिक्थ में किया जाता है।

तीसरे कोष्ठ में एक दशमलव स्थान वर्द्धित संख्याओं के लघुरिक्थों के अन्तर के अन्तिम अङ्क हैं। जैसे य = '२२ के सामने इस में जो संख्या— ११४ ३७७ ८४१ है इससे समझना चाहिये कि लागा (१'२२१)—लागा(१'२२०)

$$= — '००० ११४ ३७७ ८४१ ।$$

चौथे और पाँचवें कोष्ठ में जहाँ तीन दशमलव स्थान से अधिक स्थान य में हों वहाँ का लागा(१ + य) सूक्ष्म ले आने के लिये दूसरा और तीसरा अन्तर लिखा है (चलनकलन का ८५—८६ प्रक्रम देखो) इसमें भी आदि के दशमलव जो कि ० है छोड़ दिये गये हैं। सर्वत्र वाई ओर इतने शून्य रख दशमलव का चिह्न रखो जिस में १२ दशमलव स्थान हों। छठवें कोष्ठ में तीसरे दशमलव स्थान के १ से लेकर ९ तक के मान में लघुरिक्थ जानने के लिये क्रम से तीसरे अन्तर का अन्तिम अंक हैं। जो तीसरे अन्तर के अन्तिम स्थानीय अङ्क के स्थान में उत्थापन देने से सभों का तीसरा अन्तर बनाते हैं परन्तु यदि तीसरे अन्तर के अन्तिम अङ्क का मान उसके किसी अङ्क से न्यून हो तो उपान्तिम अङ्क में एक न्यून कर तब उसके आगे इसके उस अङ्क को रख कर तीसरा अन्तर बनाना जैसा कि '४६८, और '४६९ में है जैसे लागा(१'४६०), लागा(१'४६१), लागा (१'४६२) . . . लागा(१'४६९) इन का मान जानना हो तो '४६ के सामने का अङ्क लेने से

३,४,३,२,०,१,२,८,८ ये हुए इन का उत्थापन तीसरे अन्तर (—३८५) के

Δ^3 के लिये अङ्क	Δ^2	Δ^2	Δ	लागा(१ + य)				य
०	-३८५	४२०४९८	-४७६०५२	९४७	२३९	७३४	४३०	४६०
३	३८३	४२०११३	-५५५५४	९४७	२३९	२५८	३७८	४६१
४	३८४	४१९७३०	+ ३६४५५९	९४७	२३९	२०२	८२४	४६२
३	३८३	४१९३४६	७८४२८९	९४७	२३९	५६७	३८३	४६३
२	३८२	४१८९६३	१२०३६३५	९४७	२४०	३५१	६७२	४६४
०	३८०	४१८५८१	१६२२५९८	९४७	२४१	५५५	३०७	४६५
१	३८१	४१८२०१	२०४११७९	९४७	२४३	१७७	९०५	४६६
२	३८२	४१७८२०	२४५९३८०	९४७	२४५	२१९	०८४	४६७
८	३७८	४१७४३८	२८७७२००	९४७	२४७	६७८	४६४	४६८
८	३७८	४१७०६०	३२९४६३८	९४७	२५०	५५५	६६४	४६९
		४१६६८२	३७११६९८	९४७	२५३	५५०	३०२	४७०

अन्तिम अङ्क के स्थान में देने से और अन्त के दो अङ्कों ८, ८ के तीसरे अन्तर के अन्तिम अङ्क, ५ से बड़ा होने के कारण तीसरे अन्तर के उपान्तिम अङ्क ८ में एक कम कर देने से ४६१, ४६२, ४६९ का तीसरा अन्तर बना फिर इनका संस्कार बीजगणित की रीति से धन ऋण के वश ४६० के दूसरे अन्तर में करने से नवों का दूसरा अन्तर बन गया फिर इनका संस्कार ४६० के प्रथम अन्तर में करने से सबों का प्रथम अन्तर बन गया और अन्त में य के ४६० मान में जो लागा(१ + य) है इसमें प्रथम अन्तर का संस्कार करने से सबों का लघुरिक्त बन गया है। इन सबों का क्रम पूर्वक न्यास ऊपर के चक्र में लिख दिया है। इस पर से सब अन्तरों को लेकर चलनकलन के ८५-८६ प्रक्रम से यदि गा(१ + य) के न्यूनतम मान का (जो कि २११ प्रक्रम से य के ४६१६ मान में सिद्ध होता है) सूक्ष्म लघुरिक्त ले आवो तो ९.९४७२३९१७४३९३४० इतना आता है।

२४६। $\int z^{-y} y^{-1}$ ता यह यूजर के दूसरे चल में यदि बड़ी सीमा ∞ के तुल्य न हो किन्तु अ के तुल्य हो तो खण्डचलानयन से

$$\int_0^{\infty} \frac{a^{-x} y^{n-1}}{e^{-x}} dx$$

$$= \frac{a^{-n} e^{-an}}{n} \left\{ 1 + \frac{a}{n+1} + \frac{a^2}{(n+1)(n+2)} + \frac{a^3}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots \right\}$$

वा, $\int_0^{\infty} \frac{a^{-x} y^{n-1}}{e^{-x}} dx$

$$= a^{-n-1} e^{-an} \left\{ 1 + \frac{n-1}{a} + \frac{(n-1)(n-2)}{a^2} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{a^3} + \dots \right\}$$

यदि $a < 1$ और n बड़ी भारी संख्या हो तो पहली श्रेणी का और यदि $n < 1$ से और a बड़ा हो तो दूसरी श्रेणी का आसन्न मान जान सकते हो । 1 से n के छोटे होने में दूसरी श्रेणी के सम पद ऋण और विषम पद सब धन होंगे ।

अब $\int_0^{\infty} \frac{a^{-x} y^{n-1}}{e^{-x}} dx = \int_0^{\infty} \frac{a^{-x} y^{n-1}}{e^{-x}} dx + \int_0^{\infty} \frac{y^{-x} y^{n-1}}{e^{-x}} dx = \text{गा}(n)$

इस लिये $\int_0^{\infty} \frac{y^{-x} y^{n-1}}{e^{-x}} dx = \text{गा}(n) - \int_0^{\infty} \frac{a^{-x} y^{n-1}}{e^{-x}} dx$

$= \text{गा}(n) - a^{-x} y^{n-1} \text{ या } \dots$ (१)

यदि $\int_0^{\infty} \frac{a^{-x} y^{n-1}}{e^{-x}} dx = a^{-x} y^{n-1}$ या ऊपर की दूसरी श्रेणी के मान

पर से मान लो तो इसका तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$a^{-x} y^{n-1} = - (n-1) a^{-x} y^{n-2} \text{ या } a^{-x} y^{n-1} \text{ या } -a^{-x} y^{n-2} \text{ या}$

$a^{-x} y^{n-1}$ का भाग दे देने से और पक्षान्तरानयन से

$y \text{ या } = \{ y - (n-1) \} \text{ या } -y \dots \dots \dots$ (२)

समझो कि $y \text{ या } = (y - a_1) \text{ या } -y + k_1 \text{ या }^2$ यह एक (३) समीकरण है ।

इसमें यदि या ^2 का भाग दे दो और $\frac{1}{\text{या}} = 1 + \frac{g_1 \text{ या }_1}{y}$

$-y g_1 \frac{y \text{ या }_1 - \text{या }_1}{y^2} = (y - a_1) \left(1 + g_1 \frac{\text{या }_1}{y} \right) - y \left(1 + g_1 \frac{\text{या }_1}{y} \right)^2 + k_1$

वा $y \text{ या }_1 = (y + a_1 + 1) \text{ या }_1 - \frac{k_1 - a_1}{g_1} y + g_1 \text{ या }_1^2$

कल्पना करो कि $g_1 = k_1 - a_1$, $k_2 = g_1$, $a_2 = -(a_1 + 1)$ तो

$y_{11} = (y - a_2)y_1 - y + k_2 y_1$ यह ठीक पिछले ही समीकरण के ऐसा उत्पन्न हुआ, इसमें फिर $\frac{1}{y_1} = 1 + \frac{g_2 y_2}{y}$ ऐसा मान पूर्ववत् क्रिया करें

और $g_2 = k_2 - a_2$, $k_3 = g_2$, $a_3 = -(a_2 + 1)$ तो फिर ।

$y_{12} = (y - a_3) y_2 - y + k_3 y_2$ ऐसा समीकरण बनेगा । यों बार बार क्रिया करने से

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{1 + g_1 y^{-1} y_1} = \frac{1}{1 + g_1 y^{-1} \frac{1}{1 + g_2 y^{-1} y_2}} = \frac{1}{1 + \frac{g_1 y^{-1}}{1 + g_2 y^{-1} y_2}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{g_1 y^{-1}}{1 + \frac{g_2 y^{-1}}{1 + g_3 y^{-1} y_3}}} = \frac{1}{1 + \frac{g_1 y^{-1}}{1 + \frac{g_2 y^{-1}}{1 + g_3 y^{-1} y_3}}} \end{aligned}$$

इस रीति से y_1 का मान एक वितत भिन्न रूप में आता है जिसका मान जगह बचाने के लिये लाघव से ।

$$y_1 = \frac{1}{1 + \frac{g_1 y^{-1}}{1 + \frac{g_2 y^{-1}}{1 + \frac{g_3 y^{-1}}{1 + \dots}}}} \dots \text{ऐसा लिखते हैं}$$

अब (३) में यदि $a_1 = n - 1 = n_1$ और $k_1 = 0$ तो यह ठीक (२) समीकरण हो जायगा इस लिये अब जो g_1, g_2, g_3 इत्यादि पर से y_1 का विततभिन्न के रूप में मान आवेगा इसका उत्थापन (१) में देने से $\int y^{-y} y^{n-1}$ इस का मान आ जायगा । यदि a, k, g को a_1, k_1, g_1 इत्यादि के मान जानने के लिये साँचा मानो तो

$g_1 = k_1 - a_1$, $k_2 = g_1$, $a_2 = -(a_1 + 1)$ इन पर से

	१	२	३	४	५	६	७	८	इत्या.
अ	n_1	$-(n_1 + 1)$	n_1	$-(n_1 + 1)$	n_1	$-(n_1 + 1)$	n_1	$-(n_1 + 1)$	इत्या.
क	०	$-n_1$	१	$1 - n_1$	२	$2 - n_1$	३	$3 - n_1$	इत्या.
ग	$-n_1$	१	$1 - n_1$	२	$2 - n_1$	३	$3 - n_1$	४	इत्या.

फिर g के मान पर से

$$\int_y^\infty e^{-y} y^{n_1} \text{ ताय} = e^{-y} y^{n_1} \frac{1}{1 - \frac{y^{-1}}{1 + \frac{y^{-1}}{1 + \dots}}}$$

$$= e^{-y} y^{n_1} \frac{1}{1 - \frac{n_1 y^{-1} y^{-1} (1 - n_1) y^{-1}}{1 + \dots}}$$

इस में यदि $y = a$ और a एक बड़ी संख्या हो तो बहुत जल्द आसन्नमान सूक्ष्म आ जायगा फिर $\int_a^\infty e^{-y} y^{n_1} \text{ ताय}$ इसके मान से (१) समीकरण से $\int_0^a e^{-y} y^{n_1} \text{ ताय}$ इसका भी आसन्नमान आ जायगा ।

अब इतना ही कह कर इस अध्याय को समाप्त करते हैं कि इस सान्तचलानयन से अनेक चमत्कार प्रकार उत्पन्न होते हैं इसी लिये गणितज्ञ लोग आज तक कुछ न कुछ विचार करते ही चले जाते हैं । इसमें प्रवेश होने के लिये जितना हमने दिखलाया है उतना ही बहुत है ।

अभ्यास के लिये प्रश्न ।

सिद्ध करो कि

- १। $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{ज्याषताष}}{\text{कोज्याष}} = \sqrt{2} - 1$
- २। $\int_0^a \frac{\text{ताय}}{\sqrt{y} + \sqrt{a+y}} = \frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}} \sqrt{\sqrt{2}-1}$
- ३। $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{ताय}}{a + 2ky + gy^2} = \frac{\pi}{\sqrt{(a-k^2)}} \text{ यदि } a > k^2$
- ४। $\int_0^1 y^3 (1-y)^{\frac{5}{2}} \text{ ताय} = \frac{2^4}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13}$
- ५। $\int_0^1 y^4 (1-y)^{\frac{3}{2}} \text{ ताय} = \frac{2^{12}}{4 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17}$
- ६। $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{2n-2} \text{कोज्या}^{2m-2} \text{ताय} = \frac{1}{n(n+1) \dots (n+m+1)}$

- ७। $\int_0^{\infty} \frac{y^n \text{ताय}}{(अ + कय^r)^{r + \frac{n}{r}}} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots n} \frac{1}{\sqrt{(अक^{r+n})}}$
- ८। $\int_0^1 \left\{ \frac{1}{y} \right\}^n \text{ताय} = \frac{1}{n}$
- ९। $\int_0^{\infty} \frac{\text{ताय}}{(अ^n - य^n)^{\frac{1}{n}}} = \frac{\pi}{n \text{ज्या} \frac{\pi}{n}}$
- १०। $\int_0^{\infty} \frac{\text{ताय}}{(य^r + अ^n)(य^r + क^n)} = \frac{\pi}{2अक(अ + क)}$
- ११। $\int_0^{\infty} \frac{\text{ताय}}{1 - य^r} = \frac{\pi}{r}$
- १२। $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{स्प}^n \text{ष ताष} = \frac{\pi}{2 \text{कोज्या} \frac{n\pi}{2}}$ यदि $n < 1$
- १३। $\int_0^1 \frac{य^m + य^{-m}}{य^n + य^{-n}} \frac{\text{ताय}}{य} = \frac{\pi}{2n \text{कोज्या} \frac{m\pi}{2n}}$ यदि $n > m$
- १४। $\int_0^{\infty} \frac{(इ^{अय} + इ^{-अय})(इ^{कय} + इ^{-कय})}{इ^{\piय} + इ^{-\piय}} \text{ताय} = \frac{\text{कोज्या}^अ \text{कोज्या}^क}{\text{काज्या}अ + \text{कोज्या}क}$
यदि $अ + क < \pi$
- १५। $\int_0^{\infty} \frac{(इ^{अय} + इ^{-अय})(इ^{कय} + इ^{-कय})}{इ^{\piय} + इ^{-\piय}} \text{ताय} = \frac{\text{ज्या}क}{\text{कोज्या}अ + \text{कोज्या}क}$
यदि $अ + क < \pi$
- १६। $\int_0^{\infty} \frac{इ^{कय} + इ^{-कय}}{इ^{\piय} + इ^{-\piय}} \text{कोज्या}अय \text{ताय} = \frac{(इ^{\frac{अ}{2}} + इ^{-\frac{अ}{2}}) \text{कोज्या}^क}{इ^{\frac{अ}{2}} + 2 \text{कोज्या}क + इ^{-\frac{अ}{2}}}$
यदि $क < \pi$
- १७। $\int_0^{\infty} \frac{इ^{कय} - इ^{-कय}}{इ^{\piय} - इ^{-\piय}} \text{कोज्या}अय \text{ताय} = \frac{\text{ज्या}क}{इ^{\frac{अ}{2}} + 2 \text{कोज्या}क + इ^{-\frac{अ}{2}}}$
यदि $क < \pi$
- १८। $\int_0^{\infty} \frac{इ^{कय} + इ^{-कय}}{इ^{\piय} - इ^{-\piय}} \text{ज्या}अय \text{ताय} = \frac{1}{2} \frac{इ^{\frac{अ}{2}} - इ^{-\frac{अ}{2}}}{इ^{\frac{अ}{2}} + 2 \text{कोज्या}क + इ^{-\frac{अ}{2}}}$

$$१९। \int_0^1 \frac{y^a - y^{-a}}{1 - y} \text{ ताय} = \pi \text{ कोस्प} a \pi - \frac{1}{a}, \text{ यदि } a < 1$$

$$२०। \int_0^\pi \frac{\text{ला}(1 + \text{ज्या} a \text{ कोज्या} y)}{\text{कोज्या} y} \text{ इसका मान क्या होगा}$$

उ० πa (अ के वश से तात्कालिक सम्बन्ध निकालो)

$$२१। \int_0^\infty \frac{e^{-ay} \text{कोज्या} my}{y} \text{ ताय इसका मान बताओ उ० स्प}^{-1} \left(\frac{m}{a} \right)$$

$$२२। \int_0^\infty \frac{\text{ला}(1 + a^2 y^2)}{1 + k^2 y^2} \text{ ताय इसका क्या मान होगा ।}$$

$$\text{उ० } \frac{\pi}{k} \text{ ला} \left(\frac{a+k}{k} \right)$$

(अ के वश से तात्कालिक सम्बन्ध निकालो)

$$२३। \int_0^\infty \frac{e^{ay} + e^{-ay}}{e^{\pi y} - e^{-\pi y}} \text{ य ताय} = \frac{1}{2} \text{ छे}^2 \frac{a}{2}$$

सिद्ध करो कि

$$२४। \int_0^1 \frac{y^a - 1 + y^{-a}}{1 + y} \frac{\text{ताय}}{y} = \text{ला} \left(\text{स्प} \frac{a\pi}{2} \right)$$

$$२५। \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ला} (1 + \text{कोज्या} a \text{ कोज्या} y) \frac{\text{ताय}}{\text{कोज्या} y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{8} - a^2 \right)$$

$$२६। \int_0^\infty \frac{y^a \text{लाय ताय}}{1 + y^2} = \frac{\pi^2}{8} \frac{\text{ज्या} \frac{a\pi}{2}}{\text{कोज्या} \frac{a\pi}{2}}$$

$$२७। \int_0^\infty \frac{(y^2 + a^2) \sqrt{3}}{y^2 + k^2 y^2 + k^2} \text{ ताय} = \frac{\pi}{2} \frac{a^2 + k^2}{k^2}$$

$$२८। \int_0^1 n y^{2n-1} e^{-y^{2n}} \text{ ताय} = 1$$

$$२९। \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \text{कोज्या} (a \text{ स्प} y) \text{ ताय} = \pi e^{-a}$$

$$३०। \text{सिद्ध करो कि } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{छे}^2 \text{ताय}}{(a^2 + k^2 \text{स्प}^2 y)^2} = \frac{\pi}{8} \left[\frac{1}{a k^2} + \frac{1}{a^2 k} \right]$$

$$३१। सिद्ध करो कि $\int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}} \sqrt{(२\text{स्पय})} \text{ ताय}$$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}} + \text{ला} \{ \sqrt{२-१} \}, \text{ मान लो कि स्पय} = \text{य}^२$$

$$३२। सिद्ध करो कि $\int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}} \sqrt{(\text{कोस्पय})} \text{ ताय} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} = [\frac{\pi}{\sqrt{2}} + \text{ला} \{ \sqrt{२+१} \}]$$$

$$३३। सिद्ध करो कि कय $\int_0^{\infty} \text{इ}^{-\text{अ}^२\text{य}^२} \text{य} \text{इ}^{\text{अ}^२\text{य}^२} \text{ताय} = \frac{\text{क}}{२\text{अ}^२}, \text{ यदि य} = \infty$$$

३४। यदि $\text{फ}(\text{य}, \frac{१}{\text{य}}) = \text{फ}(\frac{१}{\text{य}}, \text{य})$ तो सिद्ध करो कि

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{ताय}}{\text{यफ}(\text{य}, \frac{१}{\text{य}})} = २ \int_0^{\infty} \frac{\text{ताय}}{\text{यफ}(\text{य}, \frac{१}{\text{य}})}$$

$$३५। सिद्ध करो कि $\int_0^{२\pi} \text{इ}^{\text{कोज्याय}} \text{कोज्याय}(\text{ज्याताय}) \text{य} = २\pi$$$

(डेमाइवर के सिद्धान्त से कोज्याय, कोज्याय, इत्यादि के रूप में इसके मान तुल्य एक श्रेणी बना कर चलानयन करो)

$$३६। सिद्ध करो कि $\int_0^{\frac{\pi}{२}} \text{ज्या}^{\text{न}} \text{यताय} = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{२}}}{२} \frac{\text{गा}(\frac{\text{न}+१}{२})}{\text{गा}(\frac{\text{न}+३}{२})}$$$

$$३७। सिद्ध करो कि $\text{गा}(\frac{\text{न}}{२}) \text{गा}(\frac{\text{न}+१}{२}) = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{२\text{न}-१}}}{२} \text{गा}(\text{न})$$$

$$३८। सिद्ध करो कि $\int_0^{\frac{\pi}{२}} \frac{\text{ज्या}^{२\text{म}-१} \text{कोज्या}^{२\text{न}-१} \text{यताय}}{(\text{अज्या}^{२\text{य}} + \text{ककोज्या}^{२\text{य}})^{\text{म}+\text{न}}} = \frac{\text{गा}(\text{म}) \text{गा}(\text{न})}{२\text{अ}^{\text{म}} \text{क}^{\text{न}} \text{गा}(\text{म}+\text{न})}$$$

$$३९। सिद्ध करो कि $\int_0^{\infty} \text{इ}^{-\text{अय}} \text{कोज्याकय}^{\text{म}-१} \text{ताय}$$$

$$= \frac{\text{गा}(\text{म})}{(\text{अ}^२ + \text{क}^२)^{\frac{\text{म}}{२}}} \text{कोज्याम} \{ \text{स्प}^{-१} \frac{\text{क}}{\text{अ}} \}$$

$$\text{और} \int_0^{\infty} \text{इ}^{-\text{अय}} \text{ज्याकय}^{\text{म}-१} \text{ताय} = \frac{\text{गा}(\text{म})}{(\text{अ}^२ + \text{क}^२)^{\frac{\text{म}}{२}}} \text{ज्याम} \{ \text{स्प}^{-१} \frac{\text{क}}{\text{अ}} \}$$

$$\int_0^{\infty} \text{इ}^{-\text{अय}} \text{य}^{\text{म}-१} \text{ताय} = \frac{\text{गा}(\text{म})}{\text{अ}^{\text{म}}},$$

इसमें $\text{अ} = \text{अ} - \text{क} \sqrt{-१}$ मान सम्भाव्य, असम्भाव्य को बराबर करो)

४०। सिद्ध करो कि $\int_0^{\infty} \frac{\text{ज्याय}}{य} = \int_0^{\infty} \frac{\text{ज्या}^2 \text{य}}{य^3}$

४१। सिद्ध करो कि $\int_0^{\infty} \text{कोज्याकय य}^{n-1} \text{ताय} = \frac{\text{गा}(n)}{क^n} \text{कोज्या} \frac{n\pi}{2}$

$\int_0^{\infty} \text{ज्याकय य}^{n-1} \text{ताय} = \frac{\text{गा}(n)}{क^n} \text{ज्या} \frac{n\pi}{2}$

४२। सिद्ध करो कि $\int_0^{\infty} \frac{\text{कोज्याकलताल}}{ल^n}$

$= \frac{1}{\text{गा}(n)} \int_0^{\infty} \frac{\text{य}^n \text{ताय}}{क^2 + \text{य}^2} = \frac{क^{n-1}}{\text{गा}(n)} \frac{\pi}{2 \text{कोज्या} \frac{n\pi}{2}}$

$\int_0^{\infty} \frac{\text{ज्याकलताल}}{ल^n} = \frac{क^{n-1}}{\text{गा}(n)} \frac{\pi}{2 \text{ज्या} \frac{n\pi}{2}}$

४३। सिद्ध करो कि $\int_0^{\infty} \text{इ}^{-r^2} \text{र}^{-2} \text{तार} = -\sqrt{\pi}$

४४। सिद्ध करो कि $\int_0^{\infty} \left(\text{इ}^{-\frac{अ^2}{य^2}} - \text{इ}^{-\frac{क^2}{य^2}} \right) \text{ताय} = (क-अ)\sqrt{\pi}$

४५। सिद्ध करो कि $\int_0^{\infty} \frac{\text{ला}(1-2नकोज्याकय + न^2) \text{ताय}}{य} = 0$

यदि $n < 1$

४६। सिद्ध करो कि $\int_0^{\infty} \text{ला} \frac{1 + 2नकोज्याअय + न^2 \text{ताय}}{1 + 2नकोज्याकय + न^2 \text{य}} \text{ यह क्रम से}$

$2 \text{ला}(1+n) \frac{क}{अ}$, $2 \text{ला}(1 + \frac{1}{न}) \frac{क}{अ}$ इस के तुल्य होगा

यदि $n < 1$, $n > 1$

(फ्रुलानी का सिद्धान्त देखो)

४७। सिद्ध करो कि $\int_0^{\infty} \frac{\text{ताय}}{1 + \text{य}^2} \text{ला}(\text{य} + \frac{1}{\text{य}}) = \pi \text{ला}(2)$

(य = स्पष्ट ऐसा मान कर आगे क्रिया करो)

४८। सिद्ध करो कि $\int_0^{\infty} \left[\frac{\text{इ}^{-अय} - \text{इ}^{-कय}}{\text{य}} \right]^2 \text{ताय} = \text{ला} \frac{(2अ)^{2अ} (2क)^{2क}}{(अ+क)^{2(अ+क)}}$

$$४९। \text{ सिद्ध करो कि } \int_0^1 \frac{y^m - y^n}{\text{लाय}} \frac{\text{ताय}}{y} = \text{ला} \frac{m}{n}$$

(लाय = r मान दूसरा रूप बना कर फ्रुलानी का सिद्धान्त लगावो) वा

$$\text{द्विगुण चलानयन } \int_n^m \int_0^1 y^{m-1} \text{ताय ताअ इसका करो)}$$

$$५०। \text{ सिद्ध करो कि } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{ \sqrt{(\text{स्पष})} + \sqrt{(\text{कोस्पष})} \} \text{ताष} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

$$५१। \text{ सिद्ध करो कि } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{स्प}^n \text{ष}}{\text{अकोज्या}^2 \text{ष} + \text{कज्या}^2 \text{ष}}$$

$$= \frac{\pi}{2 \text{कोज्या}^2 \text{न} \pi} \frac{1}{\frac{1-n}{2} \text{अ} \frac{1+n}{2} \text{क} \frac{2}{2}}$$

यदि $n < 1$

$$५२। \text{ सिद्ध करो कि ला } \int \left\{ \frac{\sqrt{y+1}}{\sqrt{y-1}} \right\} \text{ताय} = \frac{\pi^2}{8},$$

(\sqrt{y} का अंश हर में भाग देकर लघुरिक्थ की श्रेढी से क्रिया करो)

$$५३। \text{ सिद्ध करो कि } \int_0^\infty \frac{\sqrt{y} \text{लाय}}{(1+y)^2} \text{ताय} = \pi$$

$$५४। \text{ सिद्ध करो कि } \int_0^1 \frac{y^{d-1} (1-y)^{m-1}}{(k+gy)^{d-m}} \text{ताय}$$

$$= \frac{\text{गा}(d)\text{गा}(m)}{\text{गा}(d+m)} \frac{1}{k^m (k+g)^d}$$

$$५५। \text{ सिद्ध करो कि } \int_0^\pi \frac{\text{ज्या}^{n-1} \text{ताष}}{(\text{अ}_1 + \text{क}_1 \text{कोज्याष})^n}$$

$$= \frac{\{\text{गा}(\frac{n}{2})\}^2}{\text{गा}(n)} \frac{2^{n-1}}{(\text{अ}_1^2 - \text{क}_1^2)^{\frac{n}{2}}}$$

$$५६। \text{ सिद्ध करो कि न } \int_0^1 \frac{y^{m-1} \text{ताय}}{(1-y^n)^{\frac{m}{n}}} = \frac{\pi}{\text{ज्या} \frac{m\pi}{n}}$$

५७। सिद्ध करो कि

$$(1-g) \int_0^1 \frac{y^{\frac{m}{n}-1} \text{ताय}}{(1+gy)(1-y)^{\frac{m}{n}}} = n \int_0^1 \frac{y^{m-1} \text{ताय}}{(1-y^n)^{\frac{m}{n}}}$$

५८। सिद्ध करो कि $\int_0^{\infty} \frac{\text{ज्या अय ज्या}^2 \text{गय}}{य}$ ताय इस का मान अ, और π के वश से ० वा $\pm \frac{\pi}{2}$ अथवा $\pm \frac{\pi}{4}$ होगा ।

५९। सिद्ध करो कि $\int_0^{\infty} \sqrt{\frac{1}{k}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{a^2}{y^2}} \text{ क ताय} = \sqrt{\frac{1}{k}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{a^2}{y^2}}$

६०। सिद्ध करो कि $\int_0^{\infty} \sqrt{1 - \frac{a^2}{y^2}} \text{ कोज्या } \{ (\frac{a^2}{y^2} \text{ ज्याष}) \} \text{ ताय}$
 $= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{a^2}{y^2}} \text{ कोज्या } \{ 2\text{अज्याष} + \frac{\pi}{2} \}$

और $\int_0^{\infty} \sqrt{1 - \frac{a^2}{y^2}} \text{ ज्या } \{ (\frac{a^2}{y^2} \text{ ज्याष}) \} \text{ ताय}$
 $= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{a^2}{y^2}} \text{ ज्या } (2\text{अज्याष} + \frac{\pi}{2})$

(५९वें प्रश्न में क के स्थान में कोज्याष + ज्याष $\sqrt{1 - \frac{a^2}{y^2}}$ का उत्थापन दे कर सम्भाव्य और असम्भाव्य को अलग अलग बराबर करो)

६१। सिद्ध करो कि $\int_0^{\infty} \frac{(1 - y^2) \text{ कोज्या गय ताय}}{1 + y^2} = \pi \sqrt{1 - \frac{a^2}{y^2}}$

६२। सिद्ध करो कि $1 - \frac{y^2}{2^2} + \frac{y^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{y^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots$
 $= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{कोज्या } (\text{यज्यार}) \text{ तार}$

६३। सिद्ध करो कि $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्यायज्या}^{-1} (\text{ज्याय ज्यार}) \text{ ताय तार} = \frac{\pi}{2} (\frac{\pi}{2} - 1)$

६४। सिद्ध करो कि $\int_0^{\infty} \text{कोज्या } (\text{कय}^{\frac{1}{n}}) \text{ ताय} = \frac{\text{गा}(n + 1) \text{ कोज्या } (\frac{\pi}{2n})}{\text{क}^n}$

६५। सिद्ध करो कि $\int_0^1 \frac{\text{लाय ताय}}{1 + य} = - \frac{\pi^2}{6}$

६६। सिद्ध करो कि $\int_0^1 \frac{\text{ताय } (\text{लाय})^{2n - 1}}{1 - य}$

$$= - \frac{2n-1}{2} \left[1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \dots \right]$$

६७। सिद्ध करो कि $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{ताय}}{\sqrt{(2अय-य^2)}\sqrt{(अ^2-य^2)}}$

$$= \frac{2}{\pi} \text{दै, (ग, } \frac{\pi}{2}), \text{ जहाँ ग} = \frac{2}{3}$$

{ ३४ प्रक्रम का (३) और ३७ प्रक्रम का (४) उदाहरण देखो }

६८। जिस वक्र का अक्षीय समीकरण $\sin \theta = गज्याष$ कोज्याप यह है उसमें $\theta = 0$ और $\theta = \frac{\pi}{2}$ के बीच में श्रुति का मध्यम मान निकालो । $उ० \frac{ग}{\pi}$

६९। सिद्ध करो कि

$$\int_0^{\infty} e^{-य^2} \text{ताय} = \frac{e^{-अ^2}}{2अ} \frac{1}{1+} \frac{क}{1+} \frac{२क}{1+} \frac{३क}{1+} + \frac{४क}{1+} \dots \text{जहाँ क} = \frac{१}{२अ^2}$$

७०। सिद्ध करो

$$\int_0^{\infty} e^{-य} \text{लायताय} = \text{लाय} + \frac{य^{-१}}{१+} \frac{य^{-१}}{१+} \frac{२य^{-१}}{१+} \frac{२य^{-१}}{१+} \frac{३य^{-१}}{१+} \frac{३य^{-१}}{१+} \dots$$

७१। पचीस अंगुल आधार पर जो वर्गाकार एक रूमाल थी उसके बीच में एक किनारे से दूसरे किनारे तक एक लड़के ने एक टेढ़ी लाल रोशनाई से धारी कर दी। धारी के प्रतिबिन्दु से सामने के भुज पर लम्ब डाला तो लम्ब का मान $६\sqrt{य}$ ठहरा तो लम्बों के मध्यम मान तुल्य लम्ब में य का क्या मान होगा। एक कोने से लम्ब मूल का अन्तर य है। $उ० य = ११\frac{१}{२}$ अंगुल

इति नवमाध्याय ।



अथ दशमाध्याय ।

मिश्रित प्रकीर्णक ।

२४७। ६३ वें प्रक्रम के अन्त में सिद्ध हो चुका है कि यदि सीमा स्थिराङ्क हों तो $\int_a^k \int_a^k f(y,r) \text{ तारताय} = \int_a^k \int_a^k f(y,r) \text{ तायतार}$

परन्तु यदि इन सीमाओं में से कोई दो चल हों जैसा कि ६४ वें प्रक्रम में दिखलाया है तब कैसे क्रम को बदल कर चलानयन करना इसके लिये एक उदाहरण दिखलाते हैं ।

$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(y,r) \text{ तार ताय}$ इसमें क्रम को बदलने की इच्छा है । अर्थात् जहाँ पहले r के वश से चलानयन किया गया है वहाँ पहले y के वश से किया चाहते हैं ।

यहाँ यदि विचारो तो r की सीमा 0 और $\sqrt{a^2-y^2}$ है इसलिये कह सकते हो कि जिस वृत्त का केन्द्र मूल स्थान और व्यासार्ध a है उसके परिधि-चतुर्थांश के प्रतिबिन्दु तक r के मान में पहले चल निकाला गया है फिर r अक्ष और वृत्त के योग बिन्दु से लेकर y के a तुल्य मान में चल का मान लाया गया है । इसलिये यदि $L = f(y,r)$ यह एक घनपृष्ठ का समीकरण कल्पना करें तो ऊपर का द्विगुण चल १७४ वें प्रक्रम से एक घनक्षेत्र के उस खण्ड के घनफल के समान है जो इस वृत्त पाद के प्रतिबिन्दु से लम्ब खड़ा करने से लम्बायों के भीतर है । इसलिये यदि अब क्रम बदलना चाहें तो वृत्तपाद के भीतर पहले y की सीमा 0 और $\sqrt{a^2-r^2}$ होगी फिर r की सीमा 0 और a होगी इसलिये ।

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(y,r) \text{ तारताय} = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} f(y,r) \text{ तायतार}$$

पेसा होगा ।

क्रम बदलने से क्या अभिप्राय है इसके समझने के लिये केवल ऊपर उदाहरण दिखलाया गया है इसके लिये कोई विधि नहीं है उदाहरण के वश बुद्धिमानों को चाहिये कि क्रम बदलने में सीमाओं का ज्ञान करें ।

२४८। ऊपर के विषय का एक और उदाहरण दिखलाते हैं ।

$\int_0^a \int_0^y \int_0^r f(y, r, l)$ ताल तार ताय इसमें क्रम को बदलना है ।

यहाँ सीमाओं के देखने से बोध होता है कि एक सूची के सीमाओं के भीतर चलानयन किया गया है जिसके सीमाओं के धरातल का क्रम से $l = 0$, $l = r$, $r = y$, $y = a$, ये समीकरण हैं ।

इसलिये क्रम बदलने से

$$\int_0^a \int_r^a \int_0^r f(y, r, l) \text{ तालतायतार}$$

$$\int_0^a \int_0^r \int_r^a f(y, r, l) \text{ तायतालतार}$$

$$\int_0^a \int_l^a \int_r^a f(y, r, l) \text{ तायतारताल}$$

$$\int_0^a \int_0^y \int_l^y f(y, r, l) \text{ तारतालताय}$$

$$\int_0^a \int_l^a \int_l^y f(y, r, l) \text{ तारतायताल}$$

ये पाँच भेद होंगे । इन पाँचों से वही चल आवेगा जो कि दिये हुए फल का चल होगा । यदि $f(y, r, l)$ के स्थान में १ रख लो तो छओ पर से $\frac{a^3}{6}$ यही मान प्रतीति के योग्य आ जायगा ।

२४२। $\int \int$ शातारताय इसको व और श के रूप में बदल देना है जहाँ शा, य और र का फल है और

$$f_1(y, r, v, sh) = 0, f_2(y, r, v, sh) = 0, \dots \dots \dots (१)$$

यहाँ पर इतना समझ लेना चाहिये कि $\int \int$ शातारताय इसमें र के ज्ञात सीमाओं के भीतर चलानयन किया गया है जो सीमायें कि य के फल हैं और य की सीमायें भी ज्ञात हैं और यह भी जानते हैं कि स्थिर हैं ।

(१) इसके दोनों समीकरणों पर से व की उन्मिति जान उनके साम्य से स्पष्ट है कि $r = f_a(y, sh)$ (२) ऐसा होगा ।

इस पर से तार = $f_a(y, sh)$ ताश जहाँ $f_a(y, sh)$ य को स्थिर मान श के वश से $f_a(y, sh)$ का तात्कालिक सम्बन्ध है ।

र, और तार का यह जो मान आया है उसका उत्थापन \int शातार में देने से \int शा, फा (य,श) ताश ऐसा होगा जहाँ शा, यह शा के मान में र का उत्थापन देने से शा का रूपान्तर है। इसलिये पहले द्विगुणचलानयन का रूप $\int \int$ शा, फा(य,श)ताशताय ऐसा होगा जहाँ र के ज्ञात सीमाओं पर से श की भी उचित सीमा (२) समीकरण से विदित हो जायँगी।

आगे अब समझो कि उदाहरण के रूप के वश से जैसा कि २४७-४८ प्रक्रमों में दिखा आये हैं $\int \int$ शा, फा (य,श) ताश ताय इसमें उचित सीमाओं के भीतर क्रम को बदल कर $\int \int$ शा, फा (य,श) ताय ताश इसका मान जान लिया अब चाहते हैं कि य और ताय को उड़ा दें और उसके स्थान में व और ताव आ जायँ।

(१) के समीकरणों पर से र की दो उन्मिति जान कर उनके साम्य से य का मान ले आवो तो स्पष्ट है कि $y = \text{फि}(श,व) \dots (३)$ होगा फिर इस पर से ताय = फि (श,व) ताव, जहाँ फि(श,व) व के वश से फि(श,व) का तात्कालिक सम्बन्ध है।

द्विगुणचल का जो $\int \int$ शा. फा(य,श) तायताश यह रूपान्तर है इसमें य, और ताय के मान का उत्थापन देने से

$\int \int$ शा फा(य,श) फि(श,व) ताव ताश जहाँ शा, के मान में य के मान का उत्थापन देने से शा आया है और फा(य,श) के मान में य के स्थान में फि(श,व) का उत्थापन दे देना है।

यहाँ य की जानी हुई सीमाओं पर से (३) समीकरण के बल से श के रूप में व की सीमा विदित हो जायगी।

(१) से और चलनकलन के

$$\frac{\text{ताफ}_1}{\text{तार}} \frac{\text{तार}}{\text{ताश}} + \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}} \frac{\text{ताव}}{\text{ताश}} + \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताश}} = 0,$$

$$\frac{\text{ताफ}_2}{\text{तार}} \frac{\text{तार}}{\text{ताश}} + \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}} \frac{\text{ताव}}{\text{ताश}} + \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताश}} = 0,$$

$$\frac{\text{ताव}}{\text{ताश}} \text{ की उन्मिति से } \frac{\frac{\text{ताफ}_1}{\text{तार}} \frac{\text{तार}}{\text{ताश}} + \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताश}}}{\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताव}}} = \frac{\frac{\text{ताफ}_2}{\text{तार}} \frac{\text{तार}}{\text{ताश}} + \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताश}}}{\frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}}}$$

$$\text{इस लिये } \frac{\text{तार}}{\text{ताश}} = \text{फ}'(\text{य,श}) = \frac{\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताश}} \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}} - \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताव}} \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताश}}}{\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताव}} \frac{\text{ताफ}_2}{\text{तार}} - \frac{\text{ताफ}_1}{\text{तार}} \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}}}$$

तात्कालिक सम्बन्ध लेने के अनन्तर r और v के स्थान में उनका मान जो y और z के रूप में आया है रख देना चाहिये ।

इसी तरह (१) से

$$\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताय}} \frac{\text{ताय}}{\text{ताव}} + \frac{\text{ताफ}_1}{\text{तार}} \frac{\text{तार}}{\text{ताव}} + \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताव}} = 0,$$

$$\frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताय}} \frac{\text{ताय}}{\text{ताव}} + \frac{\text{ताफ}_2}{\text{तार}} \frac{\text{तार}}{\text{ताव}} + \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}} = 0,$$

इस पर से $\frac{\text{तार}}{\text{ताव}}$ की उन्मिति जान कर

$$\frac{\text{ताय}}{\text{ताव}} = \frac{\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताव}} \frac{\text{ताफ}_2}{\text{तार}} - \frac{\text{ताफ}_1}{\text{तार}} \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}}}{\frac{\text{ताफ}_1}{\text{तार}} \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताय}} - \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताय}} \frac{\text{ताफ}_2}{\text{तार}}} = \text{फि}'(\text{श,व})$$

इस लिये $\text{फ}'(\text{य,श})$ $\text{फि}'(\text{श,व})$

$$= \frac{\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताश}} \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}} - \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताव}} \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताश}}}{\frac{\text{ताफ}_1}{\text{तार}} \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताय}} - \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताय}} \frac{\text{ताफ}_2}{\text{तार}}}$$

इन सबका उत्थापन देने से ।

$$\iint \text{शातारताय} = \iint \text{शा} \frac{\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताश}} \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}} - \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताव}} \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताश}}}{\frac{\text{ताफ}_1}{\text{तार}} \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताय}} - \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताय}} \frac{\text{ताफ}_2}{\text{तार}}} \text{तावताश} \quad (४)$$

यहाँ भी तात्कालिक सम्बन्ध लेने के अनन्तर y और r के मान का उत्थापन दे देना चाहिये जो कि v और z के रूप में आये हैं और शा के मान में भी y , r के इन्हीं मानों का उत्थापन दे दो ।

यदि (१) समीकरण का रूप

$$\text{फ}'(\text{य,र,व,श}) = \text{य}-\text{फि}'(\text{व,श}) = 0, \text{र}-\text{फि}'(\text{व,श}) = 0, = \text{फ}_2(\text{य,र,व,श}) \dots (५)$$

ऐसा हो तो

$$\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताय}} = १, \frac{\text{ताफ}_1}{\text{तार}} = ०, \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताय}} = ०, \frac{\text{ताफ}_2}{\text{तार}} = १,$$

इस का उत्थापन (४) में देने से

$$\iint \text{शा तारताय} = \iint \text{शा} \left(\frac{\text{ताफी}_1}{\text{ताव}} \frac{\text{ताफी}_2}{\text{ताश}} - \frac{\text{ताफी}_1}{\text{ताश}} \frac{\text{ताफी}_2}{\text{ताव}} \right) \text{तावताश}$$

यहाँ (५) वें से य, और र के मान व और श के रूप में जो निकलेंगे उनका उत्थापन शा में दे देना चाहिये ।

यदि (५) वें से य, और र के रूप में फी_१(व,श) और फी_२(व,श) का मान जानकर तात्कालिक सम्बन्ध निकालो तो ऊपर का समीकरण नीचे लिखे समीकरण के समान होगा ।

$$\iint \text{शा तारताय} = \iint \text{शा} \left(\frac{\text{ताय}}{\text{ताव}} \frac{\text{तार}}{\text{ताश}} - \frac{\text{ताय}}{\text{ताश}} \frac{\text{तार}}{\text{ताव}} \right) \text{ताशताव} \dots (६)$$

यदि (१) समीकरण का रूप नीचे लिखे के ऐसा हो

$$व - \text{फु}_1(\text{य}, \text{र}) = ०, \text{श} - \text{फु}_2(\text{य}, \text{र}) = ० \dots \dots \dots (७)$$

तो ऊपर ही की युक्ति से

$$\iint \text{शा तारताय} \iint \frac{\text{शा ताव ताश}}{\frac{\text{ताफु}_1}{\text{ताय}} \frac{\text{ताफु}_2}{\text{तार}} - \frac{\text{ताफु}_2}{\text{ताय}} \frac{\text{ताफु}_1}{\text{तार}}} = \iint \frac{\text{शा ताव ताश}}{\frac{\text{ताव ताश}}{\text{ताय तार}} - \frac{\text{ताव ताश}}{\text{तार ताय}}} (८)$$

नये चलों के यदि सीमा प्रसिद्ध हो जायँ तो (४), (६), और (८) वें से नये चल राशि के वंश से द्विगुण चल का मान सहज में सिद्ध हो जायगा परन्तु \int शा_१ फा_१(य,श) ताश ताय पर से क्रम बदलने में जहाँ कठिनता आ पड़ेगी वहाँ पर ये सब बेकाम पड़ जायँगे ।

२५०। ऊपर के प्रक्रम की व्याप्ति दिखलाने के लिये कुछ उदाहरण दिखलाते हैं ।

$$(१) \int_0^g \int_0^{g-y} \text{शा तार ताय इसको व,श के वंश से बदल देने की इच्छा है}$$

जहाँ य + र = व, र = वश ।

ऊपर के प्रक्रम में जैसा लिखा है वैसी सब क्रिया करने से

$$र = \frac{\text{शय}}{१-श} \text{ और } \frac{\text{तार}}{\text{ताश}} = \frac{\text{य}}{(१-श)^२} ।$$

जब $r = 0$ तब $\theta = 0$ और जब $r = g - y$ तब $\theta = \frac{g-y}{g}$ इस लिये पहले r को बदलने से

$$\int_0^g \int_0^{\frac{g-y}{g}} \text{शा.य} (1 - \theta)^{-2} \text{ता.श} \text{ता.य} \text{ऐसा हुआ।}$$

इस द्विगुणचल का २४७ प्रक्रम के ऐसा यदि स्वरूप विचारो तो g व्यासार्द्ध से जो वृत्त बनेगा उसके एक व्यास रेखा को y अक्ष मान और उसके एक अग्र से भुज गणना करें तो θ का मान, उस कोण की कोटिज्या होगी जो वृत्त के कोट्यग्र पर केन्द्र से गई रेखा और y अक्ष से उत्पन्न होता है। इसलिये एक वृत्तपाद के भीतर θ का मान 0 और 1 के भीतर होगा और y की सीमा 0 और $g(1 - \theta)$ के भीतर होगी इसलिये यदि ऊपर के द्विगुणचल में क्रम को बदलें तो

$$\int_0^1 \int_0^{g(1-\theta)} \text{शा.य} (1 - \theta)^{-2} \text{ता.य} \text{ता.श} \text{ऐसा होगा।}$$

अब इसमें दिये हुए समीकरण से

$$y = v(1 - \theta) \text{ और } \frac{\text{ता.य}}{\text{ता.व}} = 1 - \theta \text{ और जब } y = 0 \text{ तब } v = 0 \text{ और जब}$$

$y = g(1 - \theta)$ तब $v = g$ इसलिये ऊपर के द्विगुणचल का रूप

$$\int_0^1 \int_0^g \text{शा.व} \text{ता.व} \text{ता.श} \text{ऐसा हुआ।}$$

(२) $\int \int \theta$ तब ता.य इसको θ , और v के साथ बदल देना है जहाँ $y = \theta \text{कोज्या} \rho$, $r = \theta \text{ज्या} \rho$ ।

यहाँ मान लो कि $\theta = \rho$ और $v = \theta$ है तो २४९ प्रक्रम के (६) वें समीकरण से

$$\frac{\text{ता.य}}{\text{ता.व}} \frac{\text{ता.र}}{\text{ता.श}} - \frac{\text{ता.य}}{\text{ता.श}} \frac{\text{ता.र}}{\text{ता.व}} = \theta \text{कोज्या} \rho + \theta \text{ज्या} \rho = \theta$$

इसलिये ऊपर के द्विगुणचल का रूप $\int \int \theta$ श्रुताश्रुताप ऐसा हुआ। इसे यदि विचारो तो १७८ वें प्रक्रम में जो घनफल जानने के लिये अक्षीय समीकरण पर से प्रकार लिखा है उसी के समान है। सीमाओं का विचार अवश्य यहाँ पर कर लेना चाहिये जिसमें y और r के वश से जो अवयव आये हों वेही अवयव v और θ के वश से भी आ जायँ।

इसी में यदि शा = फ(अय + कर) तो ऊपर की युक्ति से बदलने पर द्विगुण चल का रूप

$$\int \int \text{फ} \{ \text{ज श्रु कोज्या}(\text{ष} - \text{अ}_r) \} \text{श्रु ताश्रुताय} \text{ ऐसा होगा,}$$

जहाँ ज कोज्या_r = अ और जज्या_r = क । इसमें यदि ष - अ_r = र¹ तो द्विगुण चल का रूप

$$\int \int \text{फ}(\text{ज श्रु कोज्या } \text{र}^1) \text{श्रुताश्रु तार}^1, \text{ फिर इसमें मान लो कि}$$

श्रुकोज्या¹ = य¹ और श्रुज्या¹ = र¹ तो इसका रूपान्तर

$$\int \int \text{फ}(\text{ज य}^1) \text{तार}^1 \text{ तार}^1 \text{ ऐसा होगा ।}$$

(एक एक को स्थिर मान कर तात्कालिक सम्बन्ध निकालो जैसा कि २४९ वें प्रक्रम में कहा है)

स्वर चिह्न को उड़ा देने से

$$\int \int \text{फ}(\text{अय} + \text{कर}) \text{तार ताय} = \int \int \text{फ}(\text{जय}) \text{तार ताय}$$

जहाँ ज² = √(अ² + क²) और वार्यें पक्ष की सीमाओं पर से उदाहरण के स्वरूप से दहने पक्ष में सीमाओं का ज्ञान प्रायः हो सकता है ।

(३) १५२ वें प्रक्रम से किसी घनक्षेत्र का पृष्ठफल सिद्ध है कि द्विगुण चल के रूप में $\int \int \sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}\right)^2 + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{तार}}\right)^2 \right\}} \text{तार ताय}$ ऐसा होगा इसे ताय, ताय, के वश से बदलना है जहाँ

$$ल = \text{श्रुकोज्याय}, \text{ य} = \text{श्रुज्यापकोज्याष}_r, \text{ र} = \text{श्रुज्यापज्याष}_r$$

पृष्ठ के समीकरण से ल, य और र के रूप में आजायगा इसलिये ल के स्थान में य, र का फल रख देने से स्पष्ट है कि ष, ष_r का कोई फल श्रु होगा इसलिये पहले तार ताय बदलने के लिये २४९ वें प्रक्रम की युक्ति से पहले ष को फिर ष को स्थिर मान लेने से

$$\frac{\text{ताय}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताय}} \text{ज्याष कोज्याष}_r + \text{श्रुकोज्याषकोज्याष}_r$$

$$\frac{\text{ताय}}{\text{ताय}_r} = \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताय}_r} \text{ज्याष कोज्याष}_r - \text{श्रुज्याष ज्याष}_r$$

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताय}} \text{ज्याष ज्याष}_r + \text{श्रुकोज्याप ज्याष}_r$$

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताष}_r} = \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}_r} \text{ज्याप ज्याष}_r + \text{श्रुज्यापकोज्याप}_r$$

$$\text{इस लिये } \frac{\text{ताय तार}}{\text{ताप ताष}_r} - \frac{\text{ताय तार}}{\text{ताप}_r \text{ ताप}} = \text{श्रुज्याप (श्रु कोज्याष + } \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}} \text{ज्याप)}$$

इसलिये तार ताय को हटा कर उसके स्थान में

$$\text{श्रुज्याप(श्रु कोज्याष + } \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}} \text{ज्याष) इसे रख दो ।}$$

$$\text{अब } \sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}\right)^2 + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{तार}}\right)^2 \right\}} \text{ इसके बदलने के लिये एक एक को स्थिर}$$

मानने से चलनकलन के ६६ वें प्रक्रम से

$$\frac{\text{ताल}}{\text{ताष}} = \frac{\text{ताल ताय}}{\text{ताय ताष}} + \frac{\text{ताल तार}}{\text{तार ताष}}$$

$$\frac{\text{ताल}}{\text{ताष}_r} = \frac{\text{ताल ताय}}{\text{ताय ताष}_r} + \frac{\text{ताल तार}}{\text{तार ताष}_r}$$

$$\text{और } \frac{\text{ताल}}{\text{ताष}} = \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}} \text{ कोज्याष - श्रुज्याष}$$

$$\frac{\text{ताल}}{\text{ताष}_r} = \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}_r} \text{ कोज्याप}$$

अब इन पर से $\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}$ का मान ले आओ तो एक भिन्न होगा जिसका अंश

$$= \frac{\text{ताल तार}}{\text{ताष ताष}_r} - \frac{\text{ताल तार}}{\text{ताष}_r \text{ ताप}}$$

$$= \left[\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}} \text{ कोज्याष - श्रु ज्याष} \right] \left[\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}_r} \text{ ज्याप ज्याष}_r + \text{श्रुज्याप कोज्याष}_r \right]$$

$$- \frac{\text{ताल तार}}{\text{ताष}_r \text{ ताष}}$$

$$= - \text{श्रुज्याष}_r \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}_r} + \text{श्रुज्याषकोज्याषकोज्याष}_r \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}} - \text{श्रु}^2 \text{ज्याष कोज्याष}_r$$

$$\text{और हर} = \frac{\text{ताय तार}}{\text{ताष ताष}_r} - \frac{\text{ताय तार}}{\text{ताष}_r \text{ ताष}} \text{ जिसका मान अभी ऊपर ले आये हैं ।}$$

इस तरह से

$$\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} = \frac{\text{श्रुज्याषकोज्याषकोज्याष}_r \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}} - \text{श्रुज्याष}_r \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}_r} - \text{श्रु}^2 \text{ज्याषकोज्याष}_r}{\text{श्रुज्याष (श्रुकोज्याष + ज्याष } \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}} \text{)}}$$

इसी तरह से

$$\frac{\text{ताल}}{\text{तार}} = \frac{\text{श्रुकोज्याप, } \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप,}} + \text{श्रज्याप कोज्याप ज्याप, } \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}} - \text{श्रु'ज्या'षज्याष}}{\text{श्रुज्याष (श्रुकोज्याप + ज्याप } \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}})}$$

इसलिये $1 + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{ताप}}\right)^2 + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{तार}}\right)^2$

$$= \frac{\text{श्रु'ज्या'ष} + \text{श्रु}^2 \left(\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप,}}\right)^2 + \text{श्रु'ज्या'ष} \left(\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}}\right)^2}{\text{श्रु'ज्या'ष} (\text{श्रुकोज्याप} + \text{ज्याप } \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}})^2}$$

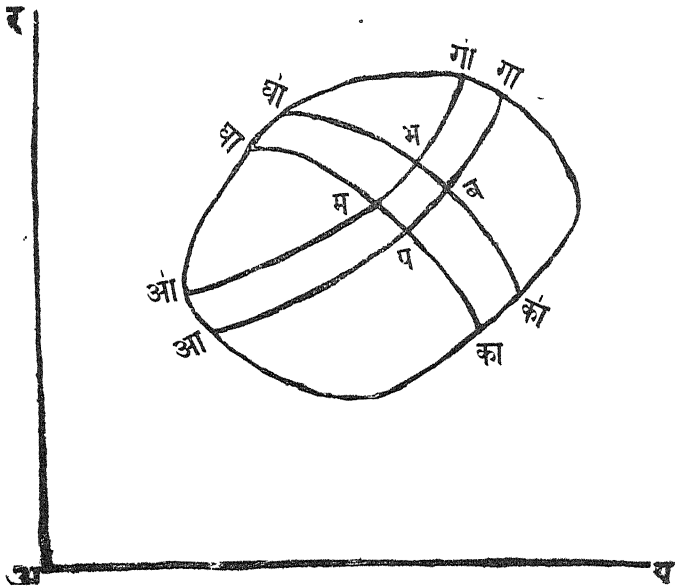
इस लिये बदले हुए द्विगुणचल का रूप

$$\iint \sqrt{\left\{ \text{श्रु'ज्या'ष} + \left(\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप,}}\right)^2 + \text{ज्या'ष} \left(\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}}\right)^2 \right\}} \text{श्रुताप ताप,}$$

ऐसा हुआ ।

यही १५५ वें प्रक्रम में भी लिख आये हैं ।

२५१। इस प्रकार से द्विगुणचल का जो परिवर्तन किया है उसे क्षेत्ररीति से भी दिखा सकते हैं ।



कल्पना करो कि \iint शा तार ताप यह एक द्विगुण चल है जिसका मान आकागाघा सीमा के भीतर जितने य, और र हैं उन सबके वश से निकाला गया

है । मानो कि $y = फा_r (व, श)$, $r = फा_r (व, श) \dots (१)$ जहाँ v और $श$ नये चल हैं ।

(१) से कल्पना करो कि

$$v = फा_r (य, र), \quad श = फा_r (य, र) \dots \dots \dots (२)$$

अब इसके पहले समीकरण में यदि v के स्थान में कोई स्थिराङ्क रख दें तो कह सकते हैं कि यह एक कोई वक्र का समीकरण होगा इसलिये नये नये स्थिराङ्कों के रखने से इस समीकरण से एक वक्रों की श्रेणी उत्पन्न होगी । मान लो कि v के स्थान में एक स्थिराङ्क का रख देने से आ प व गा वक्र का समीकरण उत्पन्न हुआ । आ प व गा यह ऐसा वक्र हुआ जिसके प्रतिविन्दु पर $फा_r (य, र)$ यह एक स्थिराङ्क के तुल्य होगा । इसी प्रकार से समझो कि v के स्थान में $v + \Delta v$ के रख देने से दूसरा आ म भ गा वक्र हुआ । इसी तरह से (१) में दूसरे समीकरण से समझो कि $श$ से एक वक्र का प म घा और $श$ के स्थान में $श + \Delta श$ के रख देने से दूसरा का व भ घा वक्र हुआ । अब मानो कि प विन्दु का भु = य, और कोटि र है जिनके वश से व भ म विन्दुओं के भुज कोटि को जानना है ।

वक्र के समीकरण से स्पष्ट है कि $श$ के स्थान में $श + \Delta श$ के रख देने से v विन्दु के भुज कोटि होंगे । इसलिये यदि $\Delta श$ का मान बहुत ही छोटा मानें तो v के भुज कोटि के मान (१) से क्रम से $y + \frac{ताय}{ताव} \Delta श$, और $r + \frac{तार}{ताश} \Delta श$ होंगे ।

इसी तरह v के स्थान में $v + \Delta v$ के रख देने से m के भुज कोटि के मान (१) से और $\Delta श$ को बहुत ही छोटा मानने से $y + \frac{ताय}{ताव} \Delta v$ और $r + \frac{तार}{ताव} \Delta v$ होंगे, v के स्थान में $v + \Delta v$ और $श$ के स्थान में $श + \Delta श$ को रख देने से m के भुज कोटि क्रमसे $y + \frac{ताय}{ताव} \Delta v + \frac{ताय}{ताश} \Delta श$ और $r + \frac{तार}{ताव} \Delta v + \frac{तार}{ताश} \Delta श$ के होंगे, । इन चारो विन्दुओं के भुज कोटि के मानों से स्पष्ट होता है कि ये चारो विन्दु एक समानान्तर चतुर्भुज के कोनों पर क्रम से स्थित हैं जो चतुर्भुज अत्यन्त छोटी दशा में वक्र चापीय चतुर्भुज हो जायगा और उसका फल यदि कोणीय भुज, कोटि के वश से ले आवो तो

$$\pm \left(\frac{\text{ताय तार}}{\text{ताव ताश}} - \frac{\text{ताय तार}}{\text{ताश ताव}} \right) \Delta \text{ श } \Delta \text{ व यह होगा ।}$$

इस लिये $\mathcal{J}\mathcal{J}$ शा तार ताय इसके स्थान में

$$\pm \int \int \text{शा} \left(\frac{\text{ताय तार}}{\text{ताव ताश}} - \frac{\text{ताय तार}}{\text{ताश ताव}} \right) \text{ताश ताव ऐसा रख सकते हैं जैसा कि}$$

२४९ वें प्रक्रम के (६) वें समीकरण में है ।

इसमें उदाहरण के स्वरूप के वश से जहाँ पर कि सीमाओं को जानते हैं धन ऋण का संशय निकल जायगा ।

यहाँ पर पहले व को स्थिर मान श के वश से जो उचित सीमाओं के भीतर चलानयन किया जायगा वह ऊपर दिखाये हुए अनेक चतुर्भुजों के योग के वश से होगा जिनसे एक आकागाधा धारी बन जायगी फिर उचित सीमाओं के भीतर व के वश से जो चलानयन किया जायगा वह सब धारियों के योग के वश से अर्थात् आकागाधा सीमाओं के वश से होगा । इस प्रकार से आकागाधा सीमाओं पर जो अनेक लम्ब खड़े किये जायँगे उनके भीतर जो घनक्षेत्र का अवयव होगा उसका घनफल आ जायगा यदि ऊपर के द्विगुणचल में शा = ल मान लें ।

२५२। इसी तरह से $\mathcal{J}\mathcal{J}\mathcal{J}$ शा ताल तार ताय इस त्रिगुणचल को तीन नये चल के वश से बदलना हो जहाँ नये चलों का पुराने से सम्बन्ध $y = फ_२(व, श, ह), र = फ_२(व, श, ह), ल = फ_३(व, श, ह) \dots \dots \dots (१)$

इस तरह का होय तो पहले ल के स्थान में ह को रखने के लिये समझ रखो कि जब ताल का साधन करते हैं उस समय य और र को स्थिर मान लेते हैं इस लिये (१) के पहले दो समीकरणों से व की उन्मिति से श का मान य, र और ह के फल रूप में आवेगा फिर विलोम उत्थापन से व का मान भी य, र और ह के कोई फल के रूप में आवेगा । इसलिये ल में इनका उत्थापन देने से ल का मान भी य, र और ह का कोई फल होगा । इसलिये इस फल में य और र को स्थिर मान जो ताल का मान आवेगा उसका स्वरूप ताह के वश से सिद्ध हो जायगा इसलिये ताल के स्थान में ताह को रख सकते हैं । अथवा (१) से चलनकलन के ६७ वें प्रक्रम से ।

$$\frac{\text{ताय}}{\text{ताह}} = ० = \frac{\text{ताफ}_१}{\text{ताव}} \frac{\text{ताव}}{\text{ताह}} + \frac{\text{ताफ}_२}{\text{ताश}} \frac{\text{ताश}}{\text{ताह}} + \frac{\text{ताफ}_३}{\text{ताह}}$$

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताह}} = 0 = \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}} \frac{\text{ताव}}{\text{ताह}} + \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताश}} \frac{\text{ताश}}{\text{ताह}} + \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताह}}$$

$$\frac{\text{ताल}}{\text{ताह}} = \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}} \frac{\text{ताव}}{\text{ताह}} + \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताश}} \frac{\text{ताश}}{\text{ताह}} + \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताह}}$$

यहाँ $\frac{\text{ताव}}{\text{ताह}}$ और $\frac{\text{ताश}}{\text{ताह}}$ के उन्मितियों पर से

$$\frac{\text{ताल}}{\text{ताह}} = \frac{\text{ना}}{\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताव}} \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताश}} - \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}} \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताश}}}$$

$$\text{जहाँ ना} = \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताह}} \left(\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताव}} \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताश}} - \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}} \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताश}} \right)$$

$$+ \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताह}} \left(\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताव}} \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताश}} - \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताव}} \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताश}} \right)$$

$$+ \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताह}} \left(\frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}} \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताश}} - \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}} \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताश}} \right)$$

इस लिये ऊपर के चिगुण चल का रूप

$$\iiint \text{शा}_1 \frac{\text{ना}}{\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताव}} \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताश}} - \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}} \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताश}}} \text{ताह तार ताव ऐसा होगा ।}$$

जहाँ शा₁ ल के स्थान में ल का मान जो य, र और ह के फल रूप में आया है उस का उत्थापन दे देने से शा का मान है । और ल के सीमाओं पर से ह सीमायें भी मालूम हो जायंगी ।

अब ऊपर के त्रिगुणचल में मान लो कि दो बार क्रम बदलने से

$$\iiint \text{शा}_1 \frac{\text{ना}}{\frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}} \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताश}} - \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}} \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताश}}} \text{तार ताव ताह इस का मान}$$

जान लिया तो २४९ वें प्रक्रम की युक्ति से ऊपर (१) के प्रथम दो समीकरणों से तार ताव के स्थान में

$$\left(\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताव}} \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताश}} - \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताश}} \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताश}} \right) \text{ताव ताश इस को रख सकते हैं ।}$$

इस लिये त्रिगुण चल का रूप बदलने से

$$\iiint \text{शा ताव ताश ताह होगा ।}$$

जहां y_1 और l के मान जो v_1 और h के फल रूप में आवेंगे उनका शा में उत्पादन देने से शा है ।

२५३ । इस प्रक्रम में ऊपर के प्रक्रमों का विशेष बोध होने के लिये दो उदाहरण दिखलाते हैं ।

$$(1) \int \int \int \dots f(a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_n y_n) t_1 y_1 t_2 y_2 \dots t_n y_n \dots t_1 y_1 \dots t_n y_n$$

इस अनेक गुणचल को एक गुणचल में बदलना है जहां चलों के प्रतिमानों के वश से (जो कि $y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 < 1$ इस नियम से आवेंगे) चलानयन किया गया है ।

यहां २५० वें प्रक्रम के (२) उदाहरण के ऐसा बार बार किया करने से अन्त में अनेक गुणचल का रूप

$$\int \int \int \dots f(j y_1 \dots) t_1 y_1 t_2 y_2 \dots t_n y_n \dots t_1 y_1 \dots t_n y_n \text{ ऐसा होगा ।}$$

$$\text{जहां } j = \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2)}$$

यहां पर यह जो परिवर्तन किया गया है वह सब चलराशियों का वर्गयोग १ से अधिक नहीं है इस नियम को न तोड़ेगा अर्थात् इस में भी सब की वही सीमा रहेंगी जो कि पहले में थीं ।

इस लिये y_1 को छोड़ और चलराशियों के वश से चलानयन करने में और $y_2^2 + y_3^2 + \dots + y_n^2 < 1 - y_1^2$ मान लेने से २१४ वें प्रक्रम में यदि d, m, n , इत्यादि को १, p, v, m इत्यादि को २ और a, k, x इत्यादि को $\sqrt{1 - y_1^2}$ मान लें तो चलराशियों के सब धन मान में मान

$$\frac{\{ \text{गा}(\frac{1}{2}) \}^{n-1}}{2^{n-1} \text{गा}(\frac{n-1}{2} + 1)} (1 - y_1^2)^{\frac{n-1}{2}} \text{ यह होगा ।}$$

परन्तु यदि जैसे चलराशियों के मान सब धन लिये गये वैसे ही ऋण लिये जाते तो सब मान ऊपर के मान का 2^{n-1} गुणित होता । इस

लिये सब मान $= \frac{\pi^{n-1} (1 - y_1^2)^{\frac{n-1}{2}}}{\text{गा}(\frac{n-1}{2} + 1)}$ इस लिये ऊपर के अनेक गुणचल का

मान साधारण चल के रूप में y_1 के -1 और $+1$ मान के भीतर

$$\frac{\pi^{n-1}}{\text{गा}(\frac{n-1}{2} + 1)} \int_{-1}^{+1} f(j y_1) (1 - y_1^2)^{\frac{n-1}{2}} t_1 y_1 \dots t_n y_n \text{ यह होगा ।}$$

$$(२) \iiint \dots \frac{f(x_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_n y_n)}{\sqrt{(1 - y_1^2 - y_2^2 - \dots - y_n^2)}} \tan y_n \tan y_{n-1} \dots \tan y_1$$

इसको साधारण चल के रूप में ले आना है । जहाँ $y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 < 1$

यहाँ भी २५० वें प्रक्रम के (२) उदाहरण के ऐसा बार बार किया करने से

$$\iiint \dots \frac{f(z y_1)}{\sqrt{(1 - y_1^2 - y_2^2 - \dots - y_n^2)}} \tan y_n \tan y_{n-1} \dots \tan y_1 \text{ ऐसा होगा ।}$$

अब यहाँ y_1 को छोड़ और चलराशियों के वश से चलानयन करने से और $y_2^2 + y_3^2 + \dots + y_n^2 < 1 - y_1^2$ इस नियम से चलराशियों के सब धन मान में २१६ वें प्रक्रम से (जैसा कि द, म, न इत्यादि का मान ऊपर (१) उदाहरण में माना है वैसा ही यहाँ भी मान लेने से)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2^{n-1}} \frac{\{ \text{गा}(\frac{1}{2}) \}^{n-1}}{\text{गा}(\frac{n-1}{2})} \int_0^{1-y_1^2} (1-y_2^2 - z)^{-\frac{1}{2}} z^{\frac{n-1}{2}} - 1 \tan y \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \frac{\{ \text{गा}(\frac{1}{2}) \}^{n-1}}{\text{गा}(\frac{n-1}{2})} \frac{\text{गा}(\frac{1}{2}) \text{गा}(\frac{n-1}{2})}{\text{गा}(\frac{n}{2})} (1-y_1^2)^{\frac{n}{2}-1} \text{ (२१२ वें प्रक्रम से)} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \frac{\{ \text{गा}(\frac{1}{2}) \}^n}{\text{गा}(\frac{n}{2})} (1-y_1^2)^{\frac{n}{2}-1} \end{aligned}$$

परन्तु यदि चलराशियों के मान क्रम भी लिये जायँ तो स्पष्ट है कि ऊपर का मान 2^{n-1} गुणित होगा ।

इसलिये ऊपर के अनेक गुण चल का मान y_1 के -1 और $+1$ मान के भीतर साधारण चल के रूप में

$$\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\text{गा}(\frac{n}{2})} \int_{-1}^{+1} f(z y_1) (1 - y_1^2)^{\frac{n}{2}-1} \tan y_1 \text{ ऐसा होगा ।}$$

२५४। बहुत से त्रिकोणमिति फलों के रूप चलराशिकलन के बल से श्रेढी में ला सकते हैं । जैसे यह चाहना है कि

$$f(y) = a_1 \text{ज्या} y + a_2 \text{ज्या} 2y + a_3 \text{ज्या} 3y + \dots + a_m \text{ज्या} my \dots (१)$$

यह समीकरण y के स्थान में ϕ , 2ϕ , 3ϕ , \dots , $m\phi$ तक उत्थापन देने तक ठीक रहे जहाँ $\phi = \frac{\pi}{m+n}$ और a_1, a_2, \dots, a_m स्थिराङ्क हैं । तो यहाँ सब स्थिराङ्कों के मान जानने के लिये नीचे लिखे हुए m समीकरण उत्पन्न होंगे

$$f(y) = a_1 \text{ज्या} \phi + a_2 \text{ज्या} 2\phi + a_3 \text{ज्या} 3\phi + \dots + a_m \text{ज्या} m\phi ।$$

$$फ(२ष) = आ_२ज्या२ष + आ_३ज्या४ष + आ_४ज्या६ष + \dots + आ_nज्या२मष ।$$

⋮

$$फ(मष) = आ_२ज्यामष + आ_३ज्या२मष + आ_४ज्यामष + \dots + आ_nज्याममष ।$$

इन में पहले को ज्यासष, दूसरे को ज्या२सष, . . . अन्त को ज्यामसष से गुण कर जोड़ देने से दहने पक्ष में आ_n का गुणक

ज्यासष ज्यानष + ज्या२सष ज्या२नष + . . . + ज्यामसष ज्यामनष यह होगा । इस गुणक का दूना त्रिकोणमिति से

$$\begin{aligned} & \text{कोज्या (स-न)ष + कोज्या२(स-न)ष + \dots + कोज्याम (स-न)ष} \\ & - \{ \text{कोज्या (स+न)ष + कोज्या२ (स+न)ष + \dots + कोज्याम(स+न)ष} \} \\ & \text{यह होगा} \end{aligned}$$

इसने ऊपर के श्रेढी का योग त्रिकोणमिति से

$$\begin{aligned} & \frac{\text{ज्या}(२म+१) \frac{(स-न)ष}{२} - \text{ज्या} \frac{(स-न)ष}{२}}{२ \text{ज्या} \frac{(स-न)ष}{२}} \\ & = \frac{\text{ज्या} \left\{ (स-न) - \frac{(स-न)ष}{२} \right\} - \text{ज्या} \frac{(स-न)ष}{२}}{२ \text{ज्या} \frac{(स-न)ष}{२}} \text{ यह होगा और इसी में न के} \end{aligned}$$

स्थान में -न का उत्थापन दे देने से नीचे के श्रेढी का योग

$$\frac{\text{ज्या} \left\{ (स+न) - \frac{(स-न)ष}{२} \right\} - \text{ज्या} \frac{(स+न)ष}{२}}{२ \text{ज्या} \frac{(स+न)ष}{२}}$$

यहाँ स्पष्ट है कि यदि स - न यह विषम संख्या होगी तो ऊपर के श्रेढी का योग शून्य होगा और यदि स - न यह सम संख्या होगी तो योग - १ होगा । इसी तरह स + न के विषम संख्या होने से दूसरी का योग शून्य और सम होने से - १ के तुल्य होगा । इस पर से यह एक सिद्धान्त उत्पन्न होता है कि यदि विषम, और सम के वश से जाति का विचार करे तो कह सकते हैं कि यदि न की जाति स से भिन्न हो तो दोनों योग शून्य और एक हो तो - १ होंगे । परन्तु संख्याओं के सिद्धान्त से यदि स - न विषम तो स + न भी विषम होगा और यदि स - न सम तो स + न भी सम होगा इसलिये यदि न, स के समान न हो अर्थात् स से भिन्न हो तो आ_n का गुणक शून्य होगा ।

यदि न = स तो आ_n का गुणक

$$\text{ज्या}^1\text{सष} + \text{ज्या}^2\text{सष} + \dots + \text{ज्या}^m\text{सष}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \{ \text{कोज्या}^2\text{सष} + \text{कोज्या}^4\text{सष} + \dots + \text{कोज्या}^{2m}\text{सष} \}$$

यह होगा जहाँ ऊपर की युक्ति से कोटिज्याओं का योग — १ के बराबर होगा । इसलिये ऐसी दशा में आ_n का गुणक $\frac{\pi+1}{2}$ यह होगा ।

इसलिये

$$\text{आ}_n = \frac{2}{\pi+1} \{ \text{ज्या}^1\text{सष फ(ष)} + \text{ज्या}^2\text{सष फ(२ष)} + \dots + \text{ज्या}^m\text{सष फ(मष)} \}$$

जहाँ स के स्थान में १, २, ... म का उत्थापन देने से आ_१, आ_२, ... आ_m इत्यादि स्थिराङ्कों के मान व्यक्त हो जायेंगे ।

ऊपर अ के मान में यदि म को अनन्त मानें तो श्रेढी के द्वारा जो ४० वें प्रक्रम में चल का स्वरूप दिखलाया है उससे

$$\text{आ}_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \text{ज्यानशफ(श)ताश पेसा होगा और } 0 \text{ और } \pi \text{ के भीतर}$$

अनन्त तुल्यान्तर य के मानों में

फ(य) = आ_१ ज्याय + आ_२ ज्या२य + आ_३ ज्या३य + ... इत्यादि यह समीकरण ठीक होगा ।

लाघव से ऊपर के समीकरण को

$$\text{फ(य)} = \frac{2}{\pi} \text{ यौ } \int_0^\pi \text{ज्यानय ज्यानशफ(श)ताश पेसा लिखते हैं यहाँ}$$

यौ \int_0^π यह दिखलाता है कि न के स्थान में क्रम से

१, २, ... ∞ का उत्थापन देने से जितने मान होंगे उनका योग कर दिया गया है । इस सिद्धान्त को ल्यागरेञ्ज (Lagrange) ने निकाला है । इसके विषय पर प्वाइशन (Poisson) का विशेष दिखलाते हैं ।

२५५। २३३ वें प्रक्रम से विदित है कि

$$\frac{1 - \text{च}^2}{1 - 2 \text{च कोज्या } \frac{\pi(\text{श}-\text{य})}{\text{द}} + \text{च}^2} = 1 + 2\text{चकोज्या } \frac{\pi(\text{श}-\text{य})}{\text{द}}$$

$$+ 2\text{च}^2\text{कोज्या } \frac{2\pi(\text{श}-\text{य})}{\text{द}} + 2\text{च}^3\text{कोज्या } \frac{3\pi(\text{श}-\text{य})}{\text{द}} + \dots \dots \dots (१)$$

जहाँ च, १ से न्यून है इसलिये श्रेढी का मान सान्त होगा ।

(१) के दोनों पक्षों को फ(श) ताश से गुण कर श के वश से चलानयन करो—द, द सीमाओं के भीतर और च को शून्य के समान मान लो तो बायें

पक्ष का अंश शून्य होगा इसलिये यदि इसका हर शून्य न हो तो श्रेणी द्वारा चलानयन की जो विधि है उससे स्पष्ट है कि बायें पक्ष के चल का मान शून्य होगा परन्तु यदि य का मान—द, और द के भीतर हो तो चलानयन के बीच में हर में च कोज्या $\frac{\pi(\text{श}-\text{य})}{द}$ जो यह भाग है उसका मान १ के बराबर होगा इसलिये ऐसी स्थिति में हर का मान $(१-\text{च})^२$ यह होगा तब यह नहीं कह सकते कि बायें पक्ष का चल शून्य होगा । ऐसी दशा में इसका मान जानने के लिये कल्पना करो कि श—य = ल और च = १—इ_१

$$\text{तो } \int \frac{(१-\text{च}^२)\text{फ}(\text{श})\text{ताश}}{१-२\text{चकोज्या}\frac{\pi(\text{श}-\text{य})}{द}+\text{च}^२} = \int \frac{\text{इ}_१(१+\text{च})\text{फ}(\text{य}+\text{ल})\text{ताल}}{\text{इ}_१^२+\text{४चज्या}^२\frac{\pi\text{ल}}{२द}}$$

इसमें निश्चय है कि श—य इसका मान धन वा ऋण जब बहुत ही छोटा होगा उसी समय के मान का तो विचार ही कर रहे हैं इसलिये ज्या चाप का भेद न मानने से और $\text{फ}(\text{य}+\text{ल}) = \text{फ}(\text{य})$ कल्पना करने से

$$\int \frac{\text{इ}_१(१+\text{च})\text{फ}(\text{य}+\text{ल})\text{ताल}}{\text{इ}_१^२+\text{४चज्या}^२\frac{\pi\text{ल}}{२द}} = \text{इ}_१(१+\text{च})\text{फ}(\text{य}) \int \frac{\text{ताल}}{\text{इ}_१^२+\frac{\text{च}\pi^२\text{ल}^२}{द^२}}$$

$$= २\text{इ}_१\text{फ}(\text{य}) \int \frac{\text{ताल}}{\text{इ}_१^२+\frac{\pi^२\text{ल}^२}{द^२}} = \frac{२द\text{फ}(\text{य})}{\pi} \text{स्प}^{-१} \frac{\pi\text{ल}}{\text{इ}_१द}$$

इसमें मानो कि ल की सीमा अ_१, और —क_१ है तो मान

$$\frac{२द\text{फ}(\text{य})}{\pi} \left\{ \text{स्प}^{-१} \frac{\pi\text{अ}_१}{\text{इ}_१द} + \text{स्प}^{-१} \frac{\pi\text{क}_१}{\text{इ}_१द} \right\} \text{ऐसा होगा ।}$$

इसमें इ_१ को शून्य मान लेने से

२ दफ(य) ऐसा होगा । इसलिये यदि य,—द और द के भीतर हो तो $\text{फ}(\text{य})$

$$= \frac{१}{२द} \int_{-द}^द \text{फ}(\text{श})\text{ताश} + \frac{१}{द} \text{यौ } \int_{-द}^{\infty} \text{फ}(\text{श}) \text{कोज्या } \frac{\pi(\text{श}-\text{य})}{द} \text{ताश} \dots\dots(२)$$

यदि य = द वा —द तो बायें पक्ष के चल का मान जब श, द और —द के बहुत ही पास होगा श—य = ल $\frac{२द\text{फ}(\text{य})}{\pi} \text{स्प}^{-१} \frac{\pi\text{ल}}{\text{इ}_१द}$ इन दोनों समीकरणों से क्रम से $\text{द} \{ \text{फ}(\text{द}) + \text{फ}(-\text{द}) \}$ यह होगा क्योंकि जब य = द और श = द तब श—य = ल यह समीकरण दिखलाता है कि ल का मान केवल —क_१ से ० तक

पहुँचेगा और जब $x = -d$ और $y = -d$ तब L का मान केवल 0 से अ, तक होगा। इसलिये ऐसे समय में (२) का बायाँ पक्ष $\frac{1}{2} \{ f(d) + f(-d) \}$ यह होगा।

इस प्रकार से $d, -d$ के बीच वा $d, -d$ के तुल्य y के मान में दहने पक्ष का मान निश्चित हो जाता है।

२५६। २५५ वें प्रक्रम की युक्ति से यदि 0 और d के बीच x के मान में सान्तचलानयन करो तो

$$f(y) = \frac{1}{2d} \int_0^d f(x) \text{ताश} + \frac{1}{d} \text{यौ} \int_0^{\infty} f(x) \text{कोज्या} \frac{n\pi(x-y)}{d} \text{ताश} \dots (१)$$

यह समीकरण 0 और d के बीच कोई y के मान में सत्य होगा परन्तु यदि $y = 0$ तो ऊपर के प्रक्रम की युक्ति से बायाँ पक्ष $\frac{1}{2} f(0)$ और जब $y = d$ तो बायाँ पक्ष $\frac{1}{2} f(d)$ होगा।

इसी तरह

$$0 = \frac{1}{2} \int_0^d f(x) \text{ताश} + \frac{1}{d} \text{यौ} \int_0^{\infty} f(x) \text{कोज्या} \frac{n\pi(x+y)}{d} \text{ताश}, \dots (२)$$

यह 0 और d के बीच चाहे जो y का मान मानो समीकरण सत्य होगा। परन्तु जब $y = 0$ तो बायाँ पक्ष $\frac{1}{2} f(0)$ के तुल्य और जब $y = d$ तो बायाँ पक्ष $\frac{1}{2} f(d)$ के तुल्य होगा।

(१) और (२) को जोड़ देने से

$$f(y) = y \frac{1}{d} \int_0^d f(x) \text{ताश} + \frac{2}{d} \text{यौ} \int_0^{\infty} \text{कोज्या} \frac{n\pi y}{d} \int_0^d \text{कोज्या} \frac{n\pi x}{d} f(x) \text{ताश} \dots (३)$$

यह y का मान चाहे 0 और d के तुल्य हो वा इनके बीच में हो सर्वत्र सत्य रहेगा।

(१) और (२) के अन्तर से

$$f(y) = \frac{2}{d} \text{यौ} \int_0^{\infty} \text{ज्या} \frac{n\pi y}{d} \int_0^d \text{ज्या} \frac{n\pi x}{d} f(x) \text{ताश} \dots \dots \dots (४)$$

यह y का मान यदि 0 और d के बीच में हो तब सत्य होगा और जब $y = 0$ और $y = d$ तो बायाँ पक्ष अवश्य शून्य के समान होगा। यदि देखो तो (४) समीकरण ठीक ठीक ल्याग्रांज के सिद्धान्त से मिल जाता है।

थोड़ा सा परिवर्तन कर देने से (३) से (४) और (४) से (३) समीकरण उत्पन्न हो जाता है ।

जैसे यदि (३) में $f(y)$ के स्थान में यदि ज्या $\frac{\pi y}{d}$ $f(y)$ रख दो तो

$$\text{ज्या } \frac{\pi y}{d} f(y) = \frac{1}{d} \int_0^d \text{ज्या } \frac{\pi x}{d} f(x) \text{ ताश}$$

$$+ \frac{2}{d} \text{ यौ } \int_0^{\infty} \text{कोज्या } \frac{n\pi y}{d} \int_0^d \text{कोज्या } \frac{n\pi x}{d} \text{ ज्या } \frac{\pi x}{d} f(x) \text{ ताश}$$

इसमें कोज्या $\frac{n\pi x}{d}$ ज्या $\frac{\pi x}{d}$ के स्थान में इसका जो दूसरा

$$\frac{1}{d} \text{ ज्या } \frac{(n+1)\pi x}{d} - \frac{1}{d} \text{ ज्या } \frac{(n-1)\pi x}{d} \text{ यह रूपान्तर है इसे रख}$$

देने से ज्या $\frac{\pi y}{d} f(y)$

$$= \frac{1}{d} \text{ यौ } \int_0^{\infty} \left\{ \text{कोज्या } \frac{(n-1)\pi y}{d} - \text{कोज्या } \frac{(n+1)\pi y}{d} \right\} \int_0^d \text{ज्या } \frac{n\pi x}{d} f(x) \text{ ताश}$$

ऐसा होजायगा । इसमें $\{ \}$ इसके अन्तर्गत दोनों खण्डों का त्रिकोण-मिति से $2 \text{ ज्या } \frac{n\pi y}{d} \text{ ज्या } \frac{\pi y}{d}$ ऐसा रूपान्तर कर दोनों पक्षों में ज्या $\frac{\pi y}{d}$ का भाग दे देने से (४) उत्पन्न हो जायगा । और ऊपर जो क्रिया दिखलाया है उसके विपरीत से (४) से (३) यह उत्पन्न हो जायगा ।

२५७। इन ऊपर दिखलाये हुए समीकरण रूपी सिद्धान्तों की व्याप्ति दिखलाने के लिये इस प्रक्रम में कुछ उदाहरण दिखलाते हैं ।

(१) य को जीवा की श्रेढी में ले आना है ।

यहाँ २५६ प्रक्रम का (४) समीकरण ग्रहण करो और मान लो कि $d = \pi$ तो यहाँ $f(y) = y$ इसलिये $f(x) = x$

$$\text{इसलिये } \int_0^d \text{ज्या } \frac{n\pi x}{d} f(x) \text{ ताश} = \int_0^{\pi} x \text{ ज्या } n x \text{ ताश}$$

$$= \frac{\pi}{n} \text{ यदि विषम और } - \frac{\pi}{n} \text{ यदि न सम इसलिये}$$

$$y = 2 \left\{ \text{ज्या } y - \frac{1}{3} \text{ ज्या } 3y + \frac{1}{5} \text{ ज्या } 5y - \frac{1}{7} \text{ ज्या } 7y + \dots \right\}$$

यह y के 0 और π के बीच के मानों में सत्य है और यह भी देख पड़ता है कि यदि $y = 0$ तब भी ठीक है और ऋण मान में भी देखने से स्पष्ट है कि ठीक है इसलिये $-\pi, \pi$ के बीच में $-\pi, \pi$ को छोड़ और सब मानों में समीकरण ठीक हुआ ।

(२) कोज्याय को ज्या की श्रेणी में ले आना है । यहाँ भी २५६ का (४) समीकरण लेने से $f(y) = \text{कोज्याय}$ इसलिये $f(x) = \text{कोज्याश}$ इसलिये यदि $d = \pi$ तो

$$\int \text{ज्या} \frac{n\pi x}{d} f(x) \text{ ताश} = \int \text{कोज्याश ज्यानश ताश}$$

$$= \frac{1}{2} \int \{ \text{ज्या}(n+1) \text{ श} + \text{ज्या}(n-1) \text{ श} \} \text{ ताश}$$

$$= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\text{कोज्या}(n+1)\text{श}}{n+1} + \frac{\text{कोज्या}(n-1)\text{श}}{n-1} \right\}$$

इसलिये $\int_0^{\pi} \text{कोज्याश ज्यानश ताश} = 0$ यदि n विषम हो

$$\text{और} = \frac{2n}{n^2-1} \text{ यदि सम ।}$$

इसलिये

$$\text{कोज्याय} = \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{4\text{ज्या}^2\text{य}}{2^2-1} + \frac{4\text{ज्या}^4\text{य}}{4^2-1} + \dots + \frac{1+(-1)^n}{n^2-1} n\text{ज्यानय} + \dots \right\}$$

यह 0 और π के बीच, 0 और π को छोड़ और y के सब मानों में सत्य है ।

(३) (ग) स्थिराङ्क को चाहते हैं कि y की ज्या श्रेणी में ले आवें ।

यहाँ भी २५६ प्रक्रम का (४) समीकरण लेने से और $f(y) = g$, और

$$d = \pi \text{ मान लेने से } \int_0^{\pi} g \text{ ज्यानश ताश} = g \int_0^{\pi} \text{ज्यानश ताश} = \frac{2g}{n} \text{ यदि } n$$

विषम, $= 0$, यदि n सम हो तो

इसलिये

$$g = \frac{4g}{\pi} \left\{ \text{ज्याय} + \frac{1}{3} \text{ज्या}^3\text{य} + \frac{1}{5} \text{ज्या}^5\text{य} + \dots \right\}$$

$\frac{4g}{\pi}$ का भाग दे देने से

$$\frac{\pi}{4} = \text{ज्याय} + \frac{1}{3} \text{ज्या}^3\text{य} + \frac{1}{5} \text{ज्या}^5\text{य} + \dots$$

यह ० और π के बीच ० और π को छोड़ और y के सब मानों में ठीक होगा । इसी में यदि y के स्थान में $\frac{\pi}{2} - r$ रख लें तो

$$\frac{\pi}{2} = \text{कोज्या}r - \frac{1}{3} \text{कोज्या}3r + \frac{1}{5} \text{कोज्या}5r - \frac{1}{7} \text{कोज्या}7r + \dots$$

यह r के $-\frac{\pi}{2}$ और $\frac{\pi}{2}$ के बीच $-\frac{\pi}{2}$ और $\frac{\pi}{2}$ को छोड़ और सब मानों में ठीक होगा ।

(४) y को इसकी कोटिज्या की श्रेढी में ले आवो ।

यहाँ २५६ प्रक्रम का (३) समीकरण ग्रहण करो और $d = \pi$ मान लो तो

$$\int \text{शकोज्यानशताश} = \frac{\text{शज्यानश}}{n} + \frac{\text{कोज्यानश}}{n^2}$$

इस लिये $\int_0^{\pi} \text{शकोज्यानशताश} = -\frac{2}{n^2}$ यदि n , विषम हो ।

और $= 0$ यदि n , सम हो ।

$$\text{और } \int_0^{\pi} \text{शताश} = \frac{\pi^2}{2} \text{ इसलिये}$$

$$y = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{\pi} \left\{ \text{कोज्या}y + \frac{1}{3} \text{कोज्या}3y + \frac{1}{5} \text{कोज्या}5y + \dots \right\}$$

यह y के ० और π मान में और इनके बीच के मान में भी सत्य होगा ।

यदि यहाँ $y = \frac{\pi}{2} - r$ तो r के $-\frac{\pi}{2}$ और $\frac{\pi}{2}$ मान में और इनके बीच के

मान में भी $r = \frac{x}{\pi} (\text{ज्यार} - \frac{1}{3} \text{ज्या}3r + \frac{1}{5} \text{ज्या}5r \dots)$ यह ठीक रहेगा ।

(५) $I^{\text{अय}}$ इसको ज्या की श्रेढी में ले आवो ।

यहाँ २५६ प्रक्रम का (४) समीकरण लेने से y के ० और π को छोड़ इनके बीच के मान में

$$I^{\text{अय}} = \frac{2}{\pi} \text{यौ } \infty \frac{n}{a^2 + n^2} (1 - \text{कोज्यान } \pi \times I^{\text{अ}\pi}) \text{ ज्यानय}$$

{ १० वें प्रक्रम का (५) वाँ उदाहरण देखो }

(६) $I^{\text{अय}}$ को कोटिज्या की श्रेढीमें ले आवो ।

यहाँ २५६ प्रक्रम का (३) समीकरण लेने से

$$I^{\text{अय}} = + \frac{I^{\text{अ}\pi} - 1}{a\pi} \frac{2a}{\pi} \text{यौ } \infty \frac{\text{कोज्यान}\pi \times I^{\text{अ}\pi} - 1}{a^2 + n^2} \text{कोज्यानय}$$

यह y के ० और π मान में और इनके बीच के मान में भी ठीक होगा ।

(७) ज्याअय को ज्या की श्रेणी में ले आवो । जहाँ $a < 1$ है

यहाँ भी २५६ प्रक्रम का (४) समीकरण लेने से

$$\text{ज्याअय} = \frac{2}{\pi} \text{ज्याअ}\pi \left\{ \frac{\text{ज्याय}}{1^2 - a^2} - \frac{2\text{ज्या२य}}{2^2 - a^2} + \frac{3\text{ज्या३य}}{3^2 - a^2} - \frac{4\text{ज्या४य}}{4^2 - a^2} + \dots \right\}$$

यह य के ० और π के बीच π को छोड़ और सब मानों में ठीक होगा ।

(८) कोज्याअय को कोटिज्या की श्रेणी में ले आवो । जहाँ $a < 1$ यहाँ २५६ प्रक्रम का (३) समीकरण लेने से

$$\text{कोज्याअय} = \frac{2}{\pi} \text{ज्याअ}\pi \left\{ \frac{1}{2a} - \frac{\text{अकोज्याय}}{a^2 - 1} + \frac{\text{अकोज्या२य}}{a^2 - 2^2} - \dots \right\}$$

यह य के ० और π मान में और इनके बीच के मान में भी ठीक होगा ।

(९) $e^{अय} - e^{-अय}$ इस को ज्या की श्रेणी में ले आवो ।

यहाँ २५६ प्रक्रम का (४) समीकरण लेने से

$$\int_0^{\pi} (e^{अश} - e^{-अश}) \text{ज्यानशताश} = - \frac{n(e^{अ\pi} - e^{-अ\pi})}{a^2 + n^2} \text{कोज्यान}\pi$$

इसलिये

$$e^{अय} - e^{-अय}$$

$$= \frac{2}{\pi} (e^{अ\pi} - e^{-अ\pi}) \left(\frac{\text{ज्याय}}{1^2 + a^2} - \frac{2\text{ज्या२य}}{2^2 + a^2} + \frac{3\text{ज्या३य}}{3^2 + a^2} - \dots \right)$$

(१०) $e^{अ(\pi-य)} + e^{-अ(\pi-य)}$ इसको कोटिज्या की श्रेणी में ले आवो । यहाँ २५६ प्रक्रम का (३) समीकरण लेने से

$$\int_0^{\pi} \left\{ e^{अ(\pi-श)} + e^{-अ(\pi-श)} \right\} \text{कोज्यानशताश} = \frac{\text{अ}(e^{अ\pi} - e^{-अ\pi})}{a^2 + n^2}$$

$$\text{और } \int_0^{\pi} \left\{ e^{अ(\pi-श)} + e^{-अ(\pi-श)} \right\} \text{ताश} = \frac{e^{अ\pi} - e^{-अ\pi}}{a}$$

$$\text{इसलिये } \frac{\pi}{2} \frac{e^{अ(\pi-य)} + e^{-अ(\pi-य)}}{e^{अ\pi} - e^{-अ\pi}} = \frac{1}{2a^2} + \frac{\text{कोज्याय}}{1^2 + a^2} + \frac{\text{कोज्या२य}}{2^2 + a^2} + \dots$$

इस प्रकार से हजारों उदाहरण सहज में सिद्ध हो जाते हैं ।

इन के चलानयन से और भी नये नये चमत्कार उत्पन्न होते चले जाते हैं ।

जैसे (२) उदाहरण में जो कोटिज्या का मान ज्या की श्रेणी में आया है उस का यदि ताय से गुण कर चलानयन करो तो ।

$$\frac{\pi}{8} \text{ ज्याय} = \text{स्थिर} - \frac{\text{कोज्या}^2 \text{य}}{१.३} - \frac{\text{कोज्या}^4 \text{य}}{३.५} - \frac{\text{कोज्या}^6 \text{य}}{५.७} - \dots$$

इसमें यदि $y = 0$ तो

$$\text{स्थिर} = \frac{1}{१.३} + \frac{1}{३.५} + \frac{1}{५.७} + \dots = \frac{1}{२}$$

(चलनकलन के २०वें अध्याय के ४४वें “अभ्यासार्थ” प्रश्न में $n = \infty$ मान

$\frac{1}{१.३}$ जोड़ देने से ।

२५८ । यदि २५६ प्रक्रम के (३) समीकरण में, जो कि y के ० और d और इन के बीच के सब मान में सत्य है, यदि y का मान d से पार हो तब देखना चाहिये कि दहना पक्ष किस के तुल्य होता है। मानो कि y का मान d और $२d$ के बीच में है और धन है तो यदि $y = २d - y'$ ऐसा माने जहां y' , d से न्यून है तो

$$\text{कोज्या} \frac{\text{नाय}}{d} = \text{कोज्या} \left(२n - \frac{\text{नय}}{d} \right) = \text{कोज्या} \frac{\text{नाय}}{d}$$

इस लिये इस स्थिति में दहने पक्ष का मान $f(y')$ होगा ।

फिर मानो कि y , $२d$ से बड़ा है और $२md + y'$ इस के तुल्य है जहां y' , $२d$ से अल्प है तो

$$\text{कोज्या} \frac{\text{नाय}}{d} = \text{कोज्या} \frac{\text{नाय}}{d}$$

अर्थात् दहने पक्ष का वही मान हुआ जो कि y के स्थान में y' के रख देने से होता है इस लिये यदि $y' < d$ तो दहने पक्ष का मान $f(y')$ होगा और यदि $y' > d < २d$ तो दहने पक्ष का $f(२d - y')$ यह मान होगा । इसी प्रकार सिद्ध कर सकते हो कि y के ऋण मान में भी वही मान होगा जो कि धनमान में होता है ।

इसी तरह यदि y धन और $२md + y'$ इस के तुल्य हो तो २५६ प्रक्रम के (४) समीकरण का मान $f(y')$ होगा यदि $y' < d$ और यदि $y' > d$ तो दहने पक्ष का मान $-f(२d - y')$ यह होगा । और y के ऋण मान में वही मान आवेंगे जो कि y के धनमान में आते हैं केवल धन ऋण चिह्न बदल जायगा ।

२५९। २५६ प्रक्रम के (३) और (४) समीकरण में यह कुछ आवश्यकता नहीं कि y का मान ० और d के बीच में लगाना हो किन्तु ० और a के बीच के y के मान में $f_1(y) = f_2(y)$, a और k के बीच में y के मान में $f_1(y) = f_2(y)$, और k और g के बीच में y के मान में $f_1(y) = f_2(y)$, इसी तरह अन्त में g और d के बीच में y के मान में $f_1(y) = f_2(y)$ ऐसा मान लें तौ भी समीकरण सत्य रहेगा केवल जब $y = 0$ वा a , वा k , वा g तब व्यभिचरित होगा उस समय २५६ वें प्रक्रम की युक्ति से वास्तव में दहने पक्ष का क्या रूप होगा इसका ज्ञान सहज में हो जायगा । जैसे २५६ वें प्रक्रम के (३) समीकरण का दहना पक्ष जब $y = a$ तब $\frac{1}{2} \{ f_1(a) + f_2(a) \}$ यह होगा ।

इस लिये यदि $y = a$ तब $f_1(y) = f_2(y)$ तो (३) समीकरण जब $y = a$ तब भी सत्य ठहरेगा ।

२६०। ज्या और कोटिज्या के रूप में एक श्रेढी ऐसी बनानी है जिसका योग g तुल्य हो y के ० और a के बीच के मानों में और वही योग शून्य के तुल्य हो y के a और d के बीच के मानों में ।

यहां २५६ प्रक्रम का (३) समीकरण लेने से

$f_1(y) = g$, इस लिये $f_1(a) = g$, a के ० और a के बीच के मानों में और फिर उसके बाद a के a और d के बीच के मानों में $f_1(a) = 0 = f_2(a)$ इस लिये

$$\int_0^d \text{कोज्या} \frac{n\pi a}{d} f_1(a) \text{ताश यह}$$

$$g \int_0^a \text{कोज्या} \frac{n\pi a}{d} \text{ताश} = \frac{g d}{n\pi} \text{ज्या} \frac{n\pi a}{d} \text{ऐसा होगा ।}$$

इस लिये अभीष्ट श्रेढी

$$\frac{g a}{d} + \frac{2g}{\pi} \left\{ \text{ज्या} \frac{\pi a}{d} \text{कोज्या} \frac{\pi y}{d} + \frac{1}{2} \text{ज्या} \frac{2\pi a}{d} \text{कोज्या} \frac{2\pi y}{d} + \frac{1}{3} \text{ज्या} \frac{3\pi a}{d} \text{कोज्या} \frac{3\pi y}{d} + \dots \right\}$$

इस में जब $y = a$ तब इसका मान $\frac{g}{2}$ होगा ।

अथवा इसी जगह २५६ प्रक्रम का (४) समीकरण लेने से

$$ग \int_0^अ ज्या \frac{नश\pi}{द} ताश = \frac{गद}{न\pi} \left(१ - कोज्या \frac{नअ\pi}{द} \right)$$

इस लिये अभीष्ट श्रेढी

$$\frac{२ग}{\pi} \left\{ उ ज्या \frac{\piअ}{द} ज्या \frac{\piय}{द} + ३ उ ज्या \frac{२\piअ}{द} ज्या \frac{२\piय}{द} \right. \\ \left. + \frac{५}{३} उ ज्या \frac{३\piअ}{द} ज्या \frac{३\piय}{द} + \dots \right\} यह होगी$$

यहां जब य = ० तब यह श्रेढी भी शून्य और जब य = अ तब श्रेढी का मान $\frac{ग}{३}$ होगा ।

२६१। एक श्रेढी कोटिज्या के रूप में ऐसी बनाओ जिसका योग ज य हो य के ० और $\frac{द}{२}$ के बीच के मान में और जब य, $\frac{द}{२}$ और द के बीच में हो तो वही योग ज (द—य) के तुल्य हो ।

यहाँ २५६ प्रक्रम के (३) समीकरण से ।

$$\int_0^द फ(श) कोज्या \frac{न\pi श}{द} ताश \\ = \int_0^{\frac{द}{२}} ज श कोज्या \frac{न\pi श}{द} ताश + \int_{\frac{द}{२}}^द ज(द-श) कोज्या \left(\frac{न\pi श}{द} \right) ताश \\ = \frac{जद^२}{\pi} \left\{ \frac{१}{२न} ज्या \frac{न\pi}{२} + \frac{१}{\pi न^२} कोज्या \frac{न\pi}{२} - \frac{१}{\pi न^२} \right\} + \frac{जद^२}{न\pi} \left(ज्या न\pi - ज्या \frac{न\pi}{२} \right) \\ - \frac{जद^२}{\pi} \left\{ \frac{१}{न} ज्या न\pi - \frac{१}{२न} ज्या \frac{न\pi}{२} + \frac{१}{\pi न^२} कोज्या न\pi - \frac{कोज्या न\pi}{\pi न^२} \right\} \\ = \frac{जद^२}{\pi^२ न^२} \left\{ २ कोज्या \frac{न\pi}{२} - कोज्या न\pi - १ \right\}$$

यहि यदि न = ४ म + २ ऐसा होगा तो $-\frac{४ जद^२}{\pi^२ न^२}$ इसके तुल्य होगा और

सर्वत्र शून्य के तुल्य होगा । और

$$\int_0^द फ(श) ताश = ज \int_0^{\frac{द}{२}} शताश + ज \int_{\frac{द}{२}}^द (द-श)ताश = \frac{जद^२}{४}$$

इसलिये अभीष्ट श्रेढी

$$\frac{जद}{४} - \frac{जद}{\pi^२} \left\{ \frac{१}{२^२} कोज्या \frac{२\pi य}{द} + \frac{१}{६^२} कोज्या \frac{६\pi य}{द} + \frac{१}{१०^२} कोज्या \frac{१०\pi य}{द} + \dots \right\}$$

इस श्रेणी का मान यदि r रख लें तो y के 0 और $\frac{1}{2}$ मान और इनके बीच के मानों में भी $r = \frac{1}{2}$ और y के $\frac{1}{2}$ और d और इनके बीच के मानों में भी $r = \frac{1}{2}(d-y)$ यह होगा। यदि y का मान d से बड़ा हो तो २५८ वें प्रक्रम से r का मान फिर फिर यही आवेगा क्योंकि २५८ वें प्रक्रम से यदि $y = 2d - y$ जहाँ y , d से छोटा है तो दहना पक्ष $f(y)$ के अर्थात् जहाँ y , d से छोटा है वहाँ $\frac{1}{2}$ r का मान है वही यहाँ पर भी हुआ। इस तरह से २५६ वें प्रक्रम के (३) और (४) समीकरण से हजारों प्रकार के नये सिद्धान्त बना सकते हो।

अभ्यास के लिये प्रश्न।

१। सिद्ध करो कि y के $-\pi$ और π और इनके बीच के मानों में

$$\frac{y^2}{2} = \frac{\pi^2}{12} - \text{कोज्याय} + \frac{\text{कोज्या } 2y}{2^2} - \frac{\text{कोज्या } 3y}{3^2} + \dots$$

२। (१) प्रश्न से सिद्ध करो कि

$$\frac{y^3}{12} - \frac{\pi^2 y}{12} = -\text{ज्याय} + \frac{\text{ज्या } 2y}{2^3} - \frac{\text{ज्या } 3y}{3^3} + \dots$$

३। सिद्ध करो कि यदि एक श्रेणी ऐसी बनाई जाय जो y के 0 और π के बीच के मानों में शून्य, y के π और $\pi - y$ के बीच के मानों में $\pi - y$, और फिर y के $\pi - y$ और π के बीच के मानों में $\pi - y$ के तुल्य हो तो

$$\frac{y}{\pi} \left\{ \text{ज्या } \frac{y}{\pi} - \text{ज्या } \frac{2y}{\pi} + \frac{1}{3} \text{ज्या } \frac{3y}{\pi} - \frac{1}{5} \text{ज्या } \frac{4y}{\pi} + \dots \right\}$$

२६२। जिस समीकरण में

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}, \frac{\text{तार}^2}{\text{ताय}^2}, \frac{\text{तार}^3}{\text{ताय}^3}, \dots, \frac{\text{तार}^n}{\text{ताय}^n} \text{ क्रम से रहते हैं।}$$

उन्हें क्रम से एक घात, प्रथम सम्बन्ध, द्वितीय सम्बन्ध, तृतीय सम्बन्ध, ... न सम्बन्ध चलनसमीकरण कहते हैं। एक घात को प्रत्येक सम्बन्ध के साथ मिलाना चाहिये। इसी प्रकार जिसमें $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}, \left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right)^2, \left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right)^3, \dots, \left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right)^n$ ये हों उन्हें एक घात प्रथम सम्बन्ध, द्वितीयघात प्रथम सम्बन्ध, तृतीयघात प्रथम सम्बन्ध, न घात प्रथम सम्बन्ध चलनसमीकरण कहते हैं। और $\left[\frac{\text{तार}^m}{\text{ताय}^m}\right]^n$ यह जिसमें हो उसे न घात m सम्बन्ध चलनसमीकरण कहते हैं।

२६३। यदि एक घात प्रथम सम्बन्ध चलनसमीकरण का रूप

मा + ना $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = ०$ ऐसा हो जहाँ मा और ना, य और र के फल हों और फलों में य और र के घात संख्याओं का योग प्रत्येक पद में एक ही हों तो कल्पना करो कि र = यल $\therefore \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = ल + य \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}$ । समीकरण में ना का भाग दे दो तो

$$\frac{\text{मा}}{\text{ना}} + \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = ० \text{ वा } \frac{\text{मा}}{\text{ना}} + ल + य \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} = ०$$

परन्तु $\frac{\text{मा}}{\text{ना}}$, $\frac{\text{र}}{\text{य}}$ वा ल का कोई फल है इसलिये कल्पना करो कि

$$\frac{\text{मा}}{\text{ना}} = \text{फ(ल)} \text{ इसलिये य } \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} = - \{ ल + \text{फ(ल)} \}$$

$$\therefore \frac{\text{ताय}}{\text{य ताल}} = - \frac{१}{ल + \text{फ(ल)}} \therefore \text{ला} \left(\frac{\text{य}}{\text{ग}} \right) = - \int \frac{\text{ताल}}{ल + \text{फ(ल)}} , \text{ जहाँ}$$

ग कोई स्थिराङ्क है ।

अपने सुभीते के लिये जहाँ कहीं लाघव जान पड़े तहाँ य = रल ऐसा मान कर भी ऊपर की क्रिया कर सकते हो ।

(१) उदाहरण

$$\text{कल्पना करो कि य + र = (य - र) } \frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$$

$$\text{यहाँ र = यल मान लो तो } \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = ल + य \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}$$

$$\therefore ल + य \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} = \frac{\text{य + र}}{\text{य - र}} = \frac{१ + ल}{१ - ल} \therefore य \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} = \frac{१ + ल^२}{१ - ल}$$

$$\therefore \frac{\text{ताय}}{\text{य ताल}} = \frac{१ - ल}{१ + ल^२} = \frac{१}{१ + ल^२} - \frac{\text{ल}}{१ + ल^२}$$

$$\text{इसलिये ला} \left(\frac{\text{य}}{\text{ग}} \right) = \text{स्प}^{-२} ल - \frac{३}{२} \text{ ला} (१ + ल^२)$$

$$\text{वा ला} \left\{ \frac{\text{य}}{\text{ग}} (१ + ल^२)^{\frac{३}{२}} \right\} = \text{ला} \frac{\sqrt{\text{य}^२ + \text{र}^२}}{\text{ग}} = \text{स्प}^{-२} \frac{\text{र}}{\text{य}}$$

(२) एक ऐसा वक्र बताओ जिसके भुज कोटि का योग उसके अवान्तर स्पर्श-रेखा के समान हो ।

$$\text{यहाँ चलनकलन से अवान्तर स्पर्श रेखा} = \text{र } \frac{\text{ताय}}{\text{तार}} = \text{य + र, और य = रल,}$$

$$\text{मान लो } \therefore \frac{\text{ताय}}{\text{तार}} = \text{ल} + \text{र} \frac{\text{ताल}}{\text{तार}} = \frac{\text{य} + \text{र}}{\text{र}} = \text{ल} + १$$

$$\therefore \frac{\text{तार}}{\text{रताल}} = १ \therefore \text{ला} \left(\frac{\text{र}}{\text{य}} \right) = \text{ल} = \frac{\text{य}}{\text{र}} ।$$

२६४। $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} + \text{पार} = \text{वा} \dots (१)$ इसमें र का मान जानना है जहाँ पा और वा य के कोई फल हैं ।

$$\begin{aligned} \text{देखो } \frac{\text{ता}}{\text{ताय}} \left(\text{र इ}^{\int \text{पाताय}} \right) &= \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \text{इ}^{\int \text{पाताय}} + \text{पार इ}^{\int \text{पाताय}} \\ &= \text{इ}^{\int \text{पाताय}} \left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} + \text{पार} \right) \end{aligned}$$

इसलिये (१) को $\text{इ}^{\int \text{पाताय}}$ से गुण देने से

$$\text{इ}^{\int \text{पाताय}} \left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} + \text{पार} \right) = \frac{\text{ता}}{\text{ताय}} \left(\text{र इ}^{\int \text{पाताय}} \right) = \text{वा इ}^{\int \text{पाताय}}$$

इसलिये चलानयन से

$$\text{र इ}^{\int \text{पाताय}} = \text{स्थि} + \int \text{वा इ}^{\int \text{पाताय}} \text{ताय}$$

$$\text{और र} = \text{स्थि इ}^{-\int \text{पाताय}} + \text{इ}^{-\int \text{पाताय}} \int \text{वा इ}^{\int \text{पाताय}} \text{ताय}$$

$$(१) \text{ उदा० } \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} + \text{र} = \text{अय}^३,$$

$$\text{यहाँ पा} = १, \int \text{पाताय} = \text{य} \therefore \text{इ}^{\int \text{पाताय}} = \text{इ}^{\text{य}} \text{ और वा} = \text{अय}^३$$

$$\therefore \text{र} = \text{स्थि इ}^{-\text{य}} + \text{इ}^{-\text{य}} \int \text{अय}^३ \text{इ}^{\text{य}} \text{ताय}$$

$$= \text{स्थि इ}^{-\text{य}} + \text{इ}^{-\text{य}} \text{अ} \left\{ \text{य}^३ \text{इ}^{\text{य}} - ३ \int \text{य}^२ \text{इ}^{\text{य}} \text{ताय} \right\}$$

$$= \text{स्थि इ}^{-\text{य}} + \text{अ} (\text{य}^३ - ३\text{य}^२ + ६\text{य} - ६)$$

$$(२) \text{ उदा० } (१ + \text{य}^२) \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} - \text{रय} = \text{अ, वा } \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} - \frac{\text{य}}{१ + \text{य}^२} \text{ र} = \frac{\text{अ}}{१ + \text{य}^२}$$

$$\text{यहाँ पा} = -\frac{\text{य}}{१ + \text{य}^२}, \int \text{पाताय} = \text{ला} \frac{१}{\sqrt{(१ + \text{य}^२)}} \text{ और इ}^{\int \text{पाताय}} = \frac{१}{\sqrt{(१ + \text{य}^२)}}$$

$$\therefore \text{र} \frac{१}{\sqrt{(१ + \text{य}^२)}} = \text{अ} \int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{(१ + \text{य}^२)}} \times \frac{१}{१ + \text{य}^२} = \text{अ} \int \frac{\text{ताय}}{(१ + \text{य}^२)^{३/२}}$$

$$= \frac{\text{अय}}{\sqrt{(१ + य^२)}} + \text{स्थि}$$

इसलिये $r = \text{अय} + \text{स्थि} \sqrt{(१ + य^२)}$

२६५। यदि $r^{m-१} \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} + \text{पार}^m = \text{वा} r^n$ ऐसा समीकरण हो तो दोनों

पक्षों में r^n का भाग देकर $r^{m-n} = (m-n)$ ल मान लो तो

$$r^{m-n-१} \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} + \text{पार}^{m-n} = \text{वा}$$

$$\text{और } r^{m-n-१} \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}$$

$$\therefore \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} + (m-n) \text{ पाल} = \text{वा}$$

यह अब ठीक २६४ वें प्रक्रम के समीकरण ऐसा हो गया ।

$$(१) \text{ उदा० श } \frac{\text{ताश}}{\text{ताचा}} - \frac{\text{चश}^२}{\text{चा}} = - \frac{म}{\text{चा}^२}$$

$$\text{यहाँ मान लो कि } \text{श}^२ = २ल \therefore \text{श } \frac{\text{ताश}}{\text{ताचा}} = \frac{\text{ताल}}{\text{ताचा}}$$

$$\therefore \frac{\text{ताल}}{\text{ताचा}} - \frac{२चल}{\text{चा}} = - \frac{म}{\text{चा}^२}$$

$$\text{अब इस में पा} = - \frac{२च}{\text{चा}} \therefore \int \text{पाताचा} = - २ \text{चलाचा} = \text{ला} \frac{१}{\text{चा}^{२+१}}$$

$$\therefore \int \frac{\text{पाताचा}}{\text{चा}^{२+१}} = \frac{१}{\text{चा}^{२+२}} \therefore \text{ल चा}^{-२च} = - म \int \text{चा}^{-(२च+२)} \text{ताचा}$$

$$= \text{स्थि} + \frac{\text{मचा}^{-(२च+२)}}{२च+१} \therefore \text{ल} = \frac{\text{श}^२}{२} = \text{स्थि चा}^{२च} + \frac{म}{(२च+१)\text{चा}}$$

$$(२) \text{ उदा० यर}^२ \text{ तार} + \text{र}^२ \text{ ताय} = \frac{\text{अताय}}{\text{य}}, \text{ यहाँ भी}$$

ऊपर की क्रिया करने से

$$r^२ = \frac{३अ}{२य} + \frac{\text{स्थि}}{\text{य}^२}$$

२६६। मा ताय + ना तार = ० यह समीकरण $\int \text{फ (यर)} = ग$ इसका तात्कालिक चलन सर्वदा नहीं हो सकता क्योंकि सम्भव है कि $\int \text{फ (यर)}$ इसके तात्कालिक चलन में जो कि शून्य के तुल्य होगा किसी गुणक का अप-

वर्तन दे दिया गया हो अथवा कोई स्थिराङ्क का लोप हो गया हो मूल समीकरण के वश से । परन्तु जिस स्थान में इसका पूरा रूप हो अर्थात् गुणक का अपवर्तन न दिया गया हो वा स्थिराङ्क का लोप मूल समीकरण के वश से न किया गया हो तो चलनकलन की युक्ति से $\frac{\text{तास.}}{\text{ताय तार}} = \frac{\text{तास}}{\text{तार ताय}}$ इस नियम से र का मान जान सकते हो क्योंकि यहाँ

$$\text{मा} = \frac{\text{तास}}{\text{ताय}} \quad \text{और} \quad \text{ना} = \frac{\text{तास}}{\text{तार}} \quad | \quad \text{यहाँ दोनों खण्ड तात्कालिक सम्बन्ध है}$$

अर्थात् पहले में र को दूसरे में य को स्थिर मान कर सम्बन्ध निकाला गया है ।

$$\text{इसलिये स} = \int \text{मा ताय} + \text{फ}_r(r)$$

र के वश से तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$\frac{\text{तास}}{\text{तार}} = \frac{\text{ता} \cdot \text{माताय}}{\text{तार}} + \frac{\text{ताफ}_r(r)}{\text{तार}}$$

$$\text{परन्तु} \quad \frac{\text{तास}}{\text{तार}} = \text{ना} \quad \therefore \quad \frac{\text{ताफ}_r(r)}{\text{तार}} = \text{ना} - \frac{\text{ता} \cdot \text{माताय}}{\text{तार}}$$

$$\text{और} \quad \text{फ}_r(r) = \int \left(\text{ना} - \frac{\text{ता} \cdot \text{माताय}}{\text{तार}} \right) \text{तार}$$

$$\text{इसलिये स} = \int \text{मा ताय} + \int \left(\text{ना} - \frac{\text{ता} \cdot \text{माताय}}{\text{तार}} \right) \text{तार} + \text{स्थि}$$

$$(१) \text{ उदा० कल्पना करो कि ताम} = \frac{२ \text{ ताय}}{\sqrt{(य^२ - र^२)}} - \frac{२ \text{ य तार}}{र \sqrt{(य^२ - र^२)}}$$

$$\text{यहाँ} \quad \text{मा} = \frac{२}{\sqrt{(य^२ - र^२)}}, \quad \text{ना} = \frac{-२ \text{ य}}{र \sqrt{(य^२ - र^२)}}$$

$$\text{इस लिये} \quad \frac{\text{तामा}}{\text{तार}} = \frac{२र}{(य^२ - र^२)^{\frac{३}{२}}} \quad | \quad \frac{\text{ताना}}{\text{ताय}} = \frac{-२}{र} \left(\frac{-र^२}{(य^२ - र^२)^{\frac{३}{२}}} \right) = \frac{२र}{(य^२ - र^२)^{\frac{३}{२}}}$$

$$\therefore \text{स} = \int \text{मा ताय} + \text{फ}_r(r) = २ \int \left\{ \text{य} + \sqrt{(य^२ - र^२)} \right\} + \text{फ}_r(r)$$

$$\frac{\text{तास}}{\text{तार}} = \frac{-२र}{\left\{ \text{य} + \sqrt{(य^२ - र^२)} \right\} \sqrt{(य^२ - र^२)}} + \frac{\text{ताफ}_r(r)}{\text{तार}} = \text{ना} = \frac{-२ \text{ य}}{र \sqrt{(य^२ - र^२)}}$$

$$\therefore \frac{\text{ताफ}_r(r)}{\text{तार}} = \frac{२}{\sqrt{(य^२ - र^२)}} \left\{ \frac{र}{\text{य} + \sqrt{(य^२ - र^२)}} - \frac{\text{य}}{र} \right\}$$

$$= \frac{-२}{\sqrt{(य^२ - र^२)}} \left\{ \frac{य^२ - र^२ + \text{य} \sqrt{(य^२ - र^२)}}{र \text{य} + र \sqrt{(य^२ - र^२)}} \right\} = -\frac{२}{र}$$

$$\therefore f_2(r) = \text{स्थि} - 2 \text{ ला } r$$

$$\text{इसलिये स} = \text{ला} \left\{ \frac{y + \sqrt{(y^2 - r^2)}}{r} \right\}^2 + \text{स्थि} ।$$

जहाँ गुणक से अपवर्त्तन दे दिया गया हो वहाँ पर बड़ी कठिनता पड़ेगी और कोई विधि नहीं है जिससे गुणक का पता लगे, केवल अपने बुद्धि बल से गुणक का पता लगा कर गणित करना चाहिये ।

२६७। इस प्रक्रम में चलनसमीकरण सम्बन्धि कुछ उदाहरण दिखाते हैं ।

(१) एक ऐसे वक्र का पता लगावो जो दिये हुए समीकरण सम्बन्धि वक्र-परम्परा को काटने से निर्दिष्टकोण तुल्य कोण बनावे ।

कल्पना करो कि दिये हुए वक्र का भुज = y और कोटि = r और साध्य वक्र का भु = y_1 और कोटि = r_1 है और निर्दिष्ट कोण की स्पर्शरेखा = m है

$$\text{तो } \text{स्प}^{-1} m = \text{स्प}^{-1} \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} - \text{स्प}^{-1} \frac{\text{तार}_1}{\text{ताय}_1} \quad \therefore m = \frac{\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} - \frac{\text{तार}_1}{\text{ताय}_1}}{1 + \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \frac{\text{तार}_1}{\text{ताय}_1}}$$

सिद्धवक्र के समीकरण पर से $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ का मान y, r के फल रूप में अर्थात् $f(y, r)$ ऐसा सिद्ध हो जायगा और योग बिन्दु पर दोनों वक्र के भुज कोटि एक ही होंगे इसलिये y_1 के स्थान में y और r_1 के स्थान में r को रख सकते हैं इन पर से फिर साध्य वक्र का समीकरण भी व्यक्त हो जायगा । ऊपर के समीकरण को ।

$$m \left\{ 1 + f(y, r) \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \right\} = f(y, r) - \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \text{ ऐसे लिख सकते}$$

हैं जो कि एकघात प्रक्रम सम्बन्धि चलनसमीकरण के ऐसा होगा ।

यदि साध्य वक्र सिद्ध वक्रों को काट कर समकोण बनावे तो $m = \infty$

$$\text{इसलिये } 1 + f(y, r) \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = 0 \quad \therefore \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = - \frac{1}{f(y, r)}$$

जैसे उस वक्र को बताओ जो उन परवलयों को काटने से समकोण बनावे जिनमें शिरःस्थान और y अक्ष एक ही है ।

कल्पना करो कि परवलय का $r^2 = 2ay$ यह समीकरण है

$$\therefore f(y, r) = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{2a}{r} = \frac{r}{2y}$$

$$\therefore \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \pm \frac{\text{अय}}{r} \text{ इसलिये } \frac{r^2}{2} = (ग^2 - अय^2)$$

यह एक दीर्घवृत्त का समीकरण हुआ जिसका केन्द्र परवलय का शिरःस्थान और बृहद्वास य अक्ष पर लम्ब होगा। यहाँ ग का मान अनिश्चित है इसलिये कोई दीर्घवृत्त जिनके व्यासों में $\sqrt{2} : 1$ यह सम्बन्ध हो वे सब परवलयों को समकोण पर काटेंगे।

(२) $\left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right)^2 + \left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right)^2 + \text{वा} \left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right)^{2-2} + \dots + \text{वा}^n = 0$ जहाँ पा, वा, इत्यादि अ, र के फल हैं इसमें र का मान क्या होगा।

इस न घात प्रथमसम्बन्ध चलनसमीकरण में साधारण वीजगणित से $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ का न विध मान आवेगा इसलिये न विध र का मान चलानयन से निकलेगा और इनका घातरूप एक और मान आवेगा।

जैसे यदि $\frac{\text{तार}^2}{\text{ताय}^2} = अ^2$ $\therefore \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \pm अ$ इसलिये $r = ग \pm अय$ वा $r = ग - अय$ ये दोनों दिये समीकरण को ठीक रखेंगे और इनका घात $(र - ग - अय)(र - ग + अय) = 0$ यह भी समीकरण को ठीक रखेगा। इस पर से यह एक उदाहरण बनता है कि उस वक्र को बताओ जिसमें चा = अय + कर हो

$$\text{यहाँ } \frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} = \sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right)^2 \right\}} = अ + क \frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$$

इससे सिद्ध है कि $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ का मान स्थिर होगा मानो कि $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = म$

तो $r = मय + ग$ यह एक सरलरेखा का समीकरण है

$$\therefore \frac{र-ग}{य} = म = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \text{ इसलिये } \sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{र-ग}{य}\right)^2 \right\}} = अ + क \left(\frac{र-ग}{य}\right)$$

यह समीकरण हुआ।

(३) $\frac{\text{तार}^2}{\text{ताय}^2} = या$ इसमें र का मान क्या होगा जहाँ या, य का कोई फल है।

पहले मानो कि $\frac{\text{तार}^2}{\text{ताय}^2} = या$ $\therefore \frac{\text{ता}}{\text{ताय}} \left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right) = या$ $\therefore \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \int याताय$
और $r = \int \left\{ \int याताय \right\} ताय$

फिर मान लो कि $\frac{तांर}{ताय} = या$, तो, $\frac{ता}{ताय} \left(\frac{तांर}{ताय} \right) = या$ $\therefore \frac{तांर}{ताय} = \int याताय$

फिर ऊपर के ऐसा दो बार चलानयन करो। यहाँ स्थिराङ्क को छोड़ दिया है।

(४) $\frac{तांर}{ताय} = रा$ यहाँ (रा, र कोई फल है) र का मान क्या होगा।

मान लो कि $\frac{तार}{ताय} = प$ $\therefore \frac{तांर}{ताय} = \frac{ताप}{ताय} = \frac{ताप}{तार} \frac{तार}{ताय} = प \frac{ताप}{तार}$
 $= रा$ $\therefore \frac{प^२}{२} = स्थि + \int रातार$

(५) $\frac{तांर}{ताय} + पा \frac{तार}{ताय} + वार = ०$ इसमें र का मान क्या होगा।

यहाँ मान लो कि

$र = इ^{\int शताय} \therefore \frac{तार}{ताय} = श इ^{\int शताय}$, $\frac{तांर}{ताय} = \left(\frac{ताश}{ताय} + श^२ \right) इ^{\int शताय}$

इसलिये $इ^{\int शताय} \left\{ श + पाश + वा + \frac{ताश}{ताय} \right\} = ०$

$\therefore श^२ + पाश + वा + \frac{ताश}{ताय} = ०$ इसलिये यदि पा और वा

स्थिराङ्क हों तो सहज में श का और श पर से र का ज्ञान हो जायगा।
 क्योंकि यदि पा = आ और वा = का तो

$श^२ + आश + का + \frac{ताश}{ताय} = \frac{ताश}{ताय} + (श-अ_१)(श-क_१) = ०$

जहाँ $श^२ + आश + का = ०$ इसमें श का, अ_१ और क_१ मान हैं।

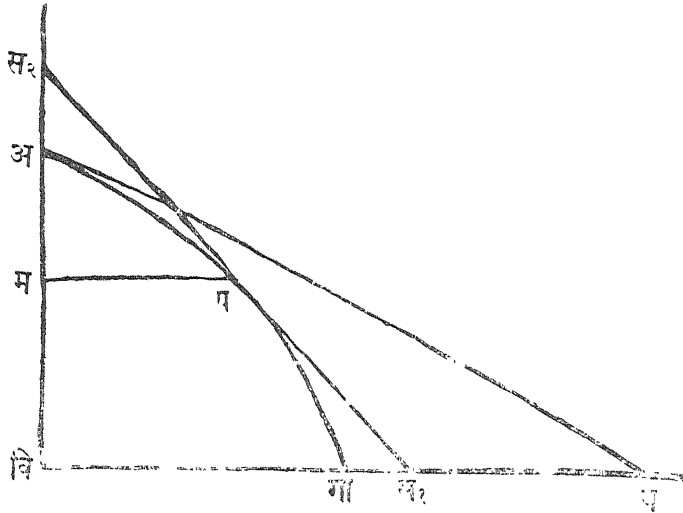
इसमें यदि श = अ_१, वा श = क_१ तो समीकरण ठीक होता है

इसलिये $र = इ^{\int अ_१ताय} = इ^{\int अ_१य + ग} = ग_१ इ^{\int अ_१य}$ वा $र = ग_२ इ^{\int क_१य}$ दोनों
 के योग तुल्य र मानें तो भी समीकरण ठीक होगा इसलिये

$र = ग_१ इ^{\int अ_१य} + ग_२ इ^{\int क_१य}$

अ_१ और क_१ के सम्भाव्य, असम्भाव्य, और तुल्य होने से इस में कई भेद उत्पन्न होते हैं।

(६) नव हाथ ऊँचे खंभे पर एक मोर बैठा था उसने खंभे की जड़ से २७ हाथ दूरी पर एक साँप को विल की तरफ जो कि खंभे की जड़ में थी आते देख उसके ऊपर झपटा । बतावो खंभे की जड़ से कितनी दूरी पर मोर ने साँप को पकड़ा । इस प्रश्न में इतना हम जानते हैं कि प्रतिक्षण में साँप की गति से दूनी मोर की गति थी ।



कल्पना करो कि अवि = खंभा = ९ = अ, विस = साँप विल का अन्तर = २७ = क, सअ = ग, वि विल, स, पहिले साँप का स्थान । अप गा, वह वक्र है जिस में मोर चला । इस का अय रेखा य अक्ष और अ मूल बिन्दु है । प्रतिक्षण में जब साँपही के सम्मुख मोर चलता है तब स्पष्ट है कि इष्ट स्थान में जहाँ पर साँप होगा वहाँ से वक्र पर जो स्पर्शरेखा होगी उस के स्पर्शबिन्दु पर मोर होगा । मान लो कि इष्ट समय में सर्प का स्थान स_१ और वहाँ से वक्र स्पर्शरेखा स_१ प । प, उस समय में मोर का स्थान और उसका भुज = अम = य और कोटि = पम = र हैं । मोर गति और साँप गति का सम्बन्ध = इ_१ मान रखो तो चलनकलन से ।

$$\text{स्प} \angle \text{स}_१ = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}}, \text{स}_१\text{म} = \frac{\text{र ताय}}{\text{तार}}, \text{स}_१\text{वि} = \text{अ-य} + \frac{\text{र ताय}}{\text{तार}},$$

$$\text{विस}_१ = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} (\text{अ-य}) + \text{र} । \text{इस सस}_१ = \text{क-र} (-\text{अ-य}) \frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$$

$$\text{इसलिये अप चाप} = \text{च} = \text{इ} \times \text{सस}_१ = \text{इक-इ} \left\{ \text{र} + (\text{अ-य}) \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \right.$$

इसका य के वश तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$\frac{\text{तांचा}}{\text{ताय}} = \sqrt{\left\{ 1 + \left[\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \right]^2 \right\}} = -\frac{\text{इ}_2(\text{अ-य})}{\text{ताय}^2} = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}^2} = \frac{\text{इ}_1(\text{य-अ})}{\text{ताय}} \left[\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \right]$$

इसलिये

$$\frac{\text{ताय}}{\text{य-अ}} = \frac{\text{ता} \left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \right)}{\sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \right)^2 \right\}}} = \frac{-\text{ताय इ}_2}{\text{अ-य}} \quad \text{यदि } \frac{1}{\text{इ}_1} = \text{इ}_2$$

चलानयन करने से

$$\text{स्थि} + \text{ला}(\text{अ-य})^{\text{इ}_2} = \text{ला} \left[\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} + \sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \right)^2 \right\}} \right] \quad (\text{८ वें प्रक्रम के (६) वें}$$

उदाहरण से)

इसमें यदि $\text{य} = 0$ तो

$$\begin{aligned} \text{स्थि} + \text{ला}(\text{अ})^{\text{इ}_2} &= \text{ला}[\text{स्प} < \text{अ} + \sqrt{\{1 + \text{स्प}^2 < \text{अ}\}}] \\ &= \text{ला}\left(\frac{\text{क}}{\text{अ}} + \frac{\text{ग}}{\text{अ}}\right) = \text{ला}(\text{क} + \text{ग}) - \text{ला}(\text{अ}) \end{aligned}$$

इसलिये स्थि = ला (क + ग) - ला (अ)^{इ₂ + १} इसका उत्थापन (१) में देने

$$\text{से ला} \left\{ \frac{(\text{अ-य})^{\text{इ}_2} (\text{क} + \text{ग})}{\text{अ}^{\text{इ}_2 + 1}} \right\} = \text{ला} \left[\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} + \sqrt{\left\{ 1 + \left[\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \right]^2 \right\}} \right]$$

लघुरिक्त को उड़ा देने से

$$\frac{(\text{अ-य})^{\text{इ}_2} (\text{क} + \text{ग})}{\text{अ}^{\text{इ}_2 + 1}} = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} + \sqrt{\left\{ 1 + \left[\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \right]^2 \right\}} \dots \dots \dots (२)$$

$$\begin{aligned} \frac{\text{अ}^{\text{इ}_2 + 1}}{(\text{अ-य})^{\text{इ}_2} (\text{क} + \text{ग})} &= \frac{1}{\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} + \sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \right)^2 \right\}}} = \sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \right)^2 \right\}} \\ &\quad - \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \dots \dots \dots (३) \end{aligned}$$

(२) और (३) के अन्तर से

$$\frac{२ \text{ तार}}{\text{ताय}} = \left[\frac{\text{अ-य}}{\text{अ}} \right]^{\text{इ}_2} \left[\frac{\text{क} + \text{ग}}{\text{अ}} \right] - \left[\frac{\text{अ}}{\text{अ-य}} \right]^{\text{इ}_2} \left[\frac{\text{अ}}{\text{क} + \text{ग}} \right]$$

इसलिये चलानयन से

$$२र + \text{स्थि} = \frac{\text{अ}^{\text{इ}_2}}{१ - \text{इ}_2} \left[\frac{\text{अ}}{\text{क} + \text{ग}} \right] (\text{अ-य})^{१ - \text{इ}_2}$$

$$-\frac{१}{अ^{इ_२}(१+इ_२)} \left[\frac{क+ग}{अ} \right] (अ-य)^{१+इ_२}$$

इसमें $य = ०$ तो

$$\begin{aligned} स्थिति &= \frac{अ}{१-इ_२} \frac{अ}{क+ग} - \frac{अ}{१+इ_२} \left(\frac{क+ग}{अ} \right) = \frac{-क+ग}{१-इ_२} \frac{क+ग}{१+इ_२} \\ &= \frac{-क-इ_२क+ग+गइ_२-क+इ_२क-ग+इ_२ग}{१-इ_२^२} = \frac{२इ_२ग-२क}{१-इ_२^२} \end{aligned}$$

इसका उत्थापन देकर समशोधनादि से

$$र = \frac{अ^{इ_१}}{२(१-इ_२)} \left[\frac{अ}{क+ग} \right] (अ-य)^{१-इ_२}$$

$$-\frac{अ^{-इ_२}}{२(१+इ_२)} \left[\frac{क+ग}{अ} \right] (अ-य)^{१+इ_२} - \frac{-क+इ_२ग}{१-इ_२^२} \dots \dots (४)$$

इसमें यदि $य = अ$ तो विल से साँप और मोर का योग

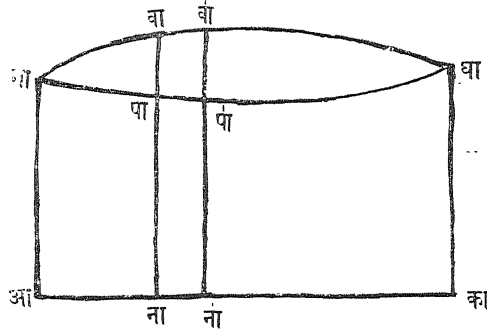
$$\begin{aligned} &= \frac{-क+इ_२ग}{१-इ_२^२} = -\frac{-क+\frac{ग}{इ_१}}{१-\frac{१}{इ_१^२}} = -\frac{-कइ_१^२+\frac{ग}{इ_१}}{इ_१^२-१} \\ &= \frac{इ_१^२क-इ_१क}{इ_१^२-१} \text{ इतने अन्तर पर हुआ ।} \end{aligned}$$

इस पर से यदि संख्यात्मक मान निकालो तो १७.०३ इतना होगा । भास्कराचार्य ने जो अपनी लीलावती के क्षेत्र व्यवहार में मोर और साँप का प्रश्न लिखा है उसमें दोनों की गति तुल्य माना है इसलिये $इ_१ = १$ इस पर से ऊपर की क्रिया करो तो विल से अनन्त दूर पर भिन्न दिशा में योग आता है इसलिये भास्कर का उदाहरण अशुद्ध है । भास्कराचार्य ने जो त्रिभुजगणित की युक्ति से अपने उदाहरण का उत्तर निकाला है वह ठीक नहीं क्योंकि मयूर कोई देवता नहीं कि उसे पहले से मालूम हो जाय कि मैं इस सरल मार्ग से चलकर जब तक पृथ्वी के जिस स्थान पर पहुँचूँगा तब तक साँप भी चल कर उसी स्थान पर पहुँच जायगा ।

वैशेषिक कलन ।

२६८ । यदि $य$ का फल ज्ञात हो तो चलनकलन की युक्ति से उसके महत्तम और न्यूनतम मान का प्रमाण भी मालूम हो जाता है परन्तु बहुत से ऐसे प्रश्न हैं जिनमें $य$ के फल ही का पता लगाना पड़ता है जिसमें महत्तम वा न्यूनतम का धर्म हो । जैसे दो दिये हुए बिन्दुओं के बीच में परमाल्प अन्तर जानना है तो

यहाँ न्यूनतम अन्तर जानने के लिये उस वक्र का पता लगाना पड़ेगा जिसका चाप दोनों विन्दुओं के अन्तर्गत परमाल्प हो। यदि गा घा दो निर्दिष्ट विन्दु हों तो यहाँ दोनों विन्दुओं पर गये गापाघा, गावाघा इत्यादि वक्रों में से एक ऐसे वक्र को चुनना चाहिये जिसका चाप औरों के चाप से छोटा हो। ऐसे



वक्र का क्या समीकरण होगा इसके लिये एक वक्र के पा विन्दु से दूसरे वक्र के वा विन्दु का पता लगाना पड़ेगा। इस पा और वा विन्दु का जो अन्तर है इसे पाना कोटि की वैशेषिक गति कहते हैं इसको "वै" से प्रकाश करेंगे। जैसा गापाघा वक्र के पा विन्दु का भुज = आना = य और कोटि = पाना = र मानो तो यदि पावा बहुत ही छोटा हो तो ता और वै में इस प्रकार का भेद है अर्थात् र + तार इससे गापाघा वक्र में पा विन्दु के बहुत ही पास में जो पा विन्दु है उसकी कोटि पाना समझी जाती है और र + वैर इससे दूसरा वक्र जो गावाघा है उसमें पा विन्दु के बहुत ही पास जो वा विन्दु है उसकी कोटि वाना समझी जाती है।

२६९। ऊपर के क्षेत्र में नापा = र, ∴ नापा = र + तार और नावा = र + वैर इसलिये नावा = नावा + ता (नावा) = र + वैर + ता (र + वैर)

और नावा = नापा + वै (नापा) = र + तार + वै (र + तार) इसलिये

$$र + वैर + ता (र + वैर) = र + वैर + तार + तावैर$$

$$= र + तार + वै (र + तार) = र + तार + वैर + वैतार इसलिये$$

$$तावैर = वैतार$$

अर्थात् वैशेषिकगति की तात्कालिकी गति और तात्कालिकी गति की वैशेषिकगति दोनों परस्पर तुल्य हैं।

इसी प्रकार यदि तार को र मान लो तो

$$तावैतार = वै तांर, वा तावैतार = तातावैर = तांवैर$$

$$∴ तांवैर = वैतांर और इसी तरह तांवैर = वैतांर।$$

यदि र की तात्कालिकी गति = र, —र यह हो और र की वैशेषिकगति बहुत ही अल्प हो तो ऊपर के सिद्धान्त से

$$वै तार = वै (र, —र) = वैर, —वैर = तावैर यह भी सिद्ध कर सकते हैं।$$

इसी तरह यदि $\int s = स$, तो $स = तास$,

$$\begin{aligned} \therefore विस = विस, &= ताविस, इसलिये \int विस = \int विस, = \int ताविस, \\ &= विस, = विस और \int^2 विस = \int विस = विस \int स = विस \int \int स = विस \int^2 स \\ \text{इसी तरह } \int^3 विस &= विस \int^3 स \end{aligned}$$

\int^4 इस से समझो कि बार बार न बार चलानयन किया गया है।

२७१। ऊपर के सिद्धान्तों के देखने से यह स्पष्ट होता है कि तात्कालिक और वैशेषिक के गणितों में केवल ता और विस का भेद है अर्थात् ता के स्थान में विस को रख देने से सब गणित तात्कालिकी गति के ऐसा हो जाता है। जैसे यदि $स = र^n$ तो चलनकलन से $तास = नर^{n-1}तार$

इस में ता के स्थान में विस को रख देने से $विस = नर^{n-1}वैर$

इसी तरह यदि $स = फ(य, र, प, व, इ०)$ जहां प, व इ०

$\frac{तार}{ताय}, \frac{तार}{ताय} इ०$ हैं तो चलनकलन से

$$\begin{aligned} तास &= \frac{तास}{ताय}ताय + \frac{तास}{तार}तार + \frac{तास}{ताप}ताप + \frac{तास}{ताव}ताव + इ० \\ &= मा ताय + ना तार + पा ताप + वा ताव + इ० \end{aligned}$$

$$\text{जहां मा} = \frac{तास}{ताय}, \text{ना} = \frac{तास}{तार}, \frac{तास}{ताप} = पा, \frac{तास}{ताव} = वा, इ०$$

इस में ता के स्थान में विस को रख देने से

$$विस = मा विस + ना वैर + पा वैप + व विस + इ०$$

२७२। $विस/स$, $वा/विस$ इस का मान यदि जानना हो जहां स, य, र, और इनके तात्कालिकी गति का कोई फल हो और य, र, ट चलराशि का फल हों तो

$$तास = मा ताय + ना तास + पातास + वा तास + \dots$$

$$+ मतार + न तार + प तार + व तार + \dots$$

$$\text{परन्तु तास} = ता ताय, तास = ता तास$$

इस लिये ता के स्थान में विस को रख देने से

$$विस = मा विस + ना विस + पा विस + वा विस + \dots$$

$$+ म वैर + न वैतार + प वैतार + व वैतार + \dots$$

$$\begin{aligned} \text{इस लिये } \int \text{वैस} &= \int (\text{मावैय} + \text{नावैताय} + \text{पावैताय} + \text{बावैताय} + \dots) \\ &+ \int (\text{मवैर} + \text{नवैतार} + \text{पवैतार} + \text{बवैतार} + \dots) \end{aligned}$$

परन्तु खण्डचलानयन से

$$\int \text{नावैताय} = \int \text{नातावैय} = \text{नावैय} - \int \text{तानावैय} ।$$

$$\begin{aligned} \int \text{पावैताय} &= \int \text{पातावैय} = \text{पातावैय} - \int \text{तापा तावैय} \\ &= \text{पातावैय} - \text{तापावैय} + \int \text{तापावैय} । \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \text{बावैताय} &= \int \text{बातावैय} = \text{बातावैय} - \int \text{ताबातावैय} \\ &= \text{बातावैय} - \text{ताबातावैय} + \int \text{ताबातावैय} \\ &= \text{बातावैय} - \text{ताबातावैय} + \text{ताबावैय} - \int \text{ताबावैय} \\ &\quad \text{इ०} \quad \quad \quad \text{इ०} \quad \quad \quad \text{इ०} \end{aligned}$$

इसी तरह

$$\int \text{नवैतार} = \int \text{नतावैर} = \text{नवैर} - \int \text{तानवैर} ।$$

$$\int \text{पवैतार} = \int \text{पतावैर} = \text{पतावैर} - \text{तापवैर} + \int \text{तापवैर} ।$$

$$\int \text{बवैतार} = \text{बतावैर} - \text{ताबतावैर} + \text{ताबवैर} - \int \text{ताबवैर} ।$$

इन सबका उत्थापन $\int \text{वैस}$ में देने से

$$\int \text{वैस} = (\text{ना} - \text{तापा} + \text{ताबा} - \text{इ०}) \text{वैय} + (\text{न} - \text{ताप} + \text{ताब} - \text{इ०}) \text{वैर}$$

$$+ (\text{पा} - \text{ताबा} + \text{इ०}) \text{तावैय} + (\text{प} - \text{ताब} + \text{इ०}) \text{तावैर}$$

$$+ (\text{बा} - \text{तामा} + \text{इ०}) \text{तावैय} + (\text{ब} - \text{ताम} + \text{इ०}) \text{तावैर}$$

$$+ \int (\text{मा} - \text{ताना} + \text{तापा} - \text{ताबा} + \text{इ०}) \text{वैय}$$

$$+ \int (\text{म} - \text{तान} + \text{ताप} - \text{ताब} + \text{इ०}) \text{वैर}$$

इसके देखने से स्पष्ट होता है कि वैय, तावैय, इत्यादि के और वैर, तावैर इत्यादि के गुणकों में साजात्य धर्म है। इस लिये एक चल स के मान में ल को और मानें तो इसके वश से \int वैस में उसी चाल के और खण्ड होंगे जैसा कि वैय और वैर के वश से उत्पन्न हुए हैं।

२७३। यदि स = शाताय जहां \int शाताय इस के वैशेषिक का ज्ञान करना हो तो कल्पना करो कि

$$\text{ताशा} = \text{माताय} + \text{नातार} + \text{पाताप} + \text{वाताय} + \text{भाताभ} + \text{इ०}$$

$$\text{जहाँ } \text{प} = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}}, \text{ व} = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}}, \text{ भ} = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \text{ । इ०}$$

$$\text{और } \text{मा} = \frac{\text{ताशा}}{\text{ताय}}, \text{ ना} = \frac{\text{ताशा}}{\text{तार}}, \text{ पा} = \frac{\text{ताशा}}{\text{ताय}}, \text{ इ०}$$

इसलिये

$$\text{वैशा} = \text{मावैय} + \text{नावैर} + \text{पावैप} + \text{वावैय} + \text{भावैम} + \text{इ०}$$

$$\text{अब } \int \text{शाताय} = \int \text{वै (शाताय)} = \int (\text{शा वैताय} + \text{ताय वैशा})$$

$$= \int (\text{शा तावैय} + \text{तायवैशा}) = \int \text{शा तावैय} + \int \text{तायवैशा}$$

$$= \text{शावैय} + \int (\text{तायवैशा} - \text{वैयताशा})$$

$$\text{परन्तु } \int (\text{तायवैशा} - \text{वैयताशा}) = \int \text{ताय} (\text{मावैय} + \text{नावैर} + \text{पावैप} + \dots) \\ - \int \text{वैय} (\text{माताय} + \text{नातार} + \text{पाताप} + \dots)$$

$$= \int \text{ना} (\text{वैर} - \text{पवैय}) \text{ताय} + \int \text{पा} (\text{वैप} - \text{ववैय}) \text{ताय} + \int \text{वा} (\text{वैव} - \text{भवैय}) \text{ताय} + \dots$$

$$\text{अब यहाँ } \text{प} = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}}, \text{ व} = \frac{\text{ताप}}{\text{ताय}}, \text{ भ} = \frac{\text{ताव}}{\text{ताय}}$$

इस लिये

$$\text{वैप} = \frac{\text{तायवैतार} - \text{तारवैताय}}{\text{ताय}^2} = \frac{\text{वैतार} - \text{पवैताय}}{\text{ताय}}$$

$$\therefore \text{वैप} - \text{ववैय} = \frac{\text{वैतार} - \text{पतावैय} - \text{तापवैय}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ता}}{\text{ताय}} (\text{वैर} - \text{पवैय})$$

$$\text{और वैय} = \frac{\text{तायवैताप} - \text{तापवैताय}}{\text{ताय}^2} = \frac{\text{तावैप} - \text{वतावैय}}{\text{ताय}}$$

$$\therefore \text{वैय} - \text{भवैय} = \frac{\text{तावैप} - \text{वतावैय} - \text{ताववैय}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ता}}{\text{ताय}} (\text{वैप} - \text{ववैय})$$

और कल्पना करो कि

$$\text{वैर} - \text{पवैय} = \text{ह} \therefore \text{वैप} - \text{ववैय} = \frac{\text{ताह}}{\text{ताय}} \quad | \quad \text{वैव} - \text{भवैय} = \frac{\text{ताह}}{\text{ताय}^2} \text{इ०}$$

इस लिये

$$\text{वै} \int \text{शाताय} = \text{शावैय} + \int \text{नाहताय} + \int \text{पा} \frac{\text{ताह}}{\text{ताय}} \text{ताय} + \int \text{वा} \frac{\text{ताह}}{\text{ताय}^2} \text{ताय} + \dots$$

$$\text{परन्तु} \int \text{पा} \frac{\text{ताह}}{\text{ताय}} \text{ताय} = \text{पाह} - \int \text{ह} \frac{\text{तापा}}{\text{ताय}} \text{ताय}$$

$$\int \text{वा} \frac{\text{ताह}}{\text{ताय}^2} \text{ताय} = \text{वा} \frac{\text{ताह}}{\text{ताय}} - \int \frac{\text{तावा}}{\text{ताय}} \frac{\text{ताह}}{\text{ताय}} \text{ताय}$$

$$= \text{वा} \frac{\text{ताह}}{\text{ताय}} - \text{ह} \frac{\text{तावा}}{\text{ताय}} + \int \text{ह} \frac{\text{तावा}}{\text{ताय}^2} \text{ताय}$$

$$\text{और} \int \text{भा} \frac{\text{ताह}}{\text{ताय}^2} \text{ताय} = \text{भा} \frac{\text{ताह}}{\text{ताय}} - \frac{\text{ताभा}}{\text{ताय}} \frac{\text{ताह}}{\text{ताय}} + \text{ह} \frac{\text{ताभा}}{\text{ताय}^2}$$

$$- \int \text{ह} \frac{\text{ताभा}}{\text{ताय}} \text{ताय}$$

$$\text{इस लिये वै} \int \text{शाताय} = \text{शावैय} + \left(\text{पा} - \frac{\text{तावा}}{\text{ताय}} + \frac{\text{ताभा}}{\text{ताय}^2} - \text{इ०} \right) \text{ह}$$

$$+ \left(\text{वा} - \frac{\text{तावा}}{\text{ताय}} + \frac{\text{ताभा}}{\text{ताय}^2} - \text{इ०} \right) \frac{\text{ताह}}{\text{ताय}}$$

$$+ \left(\text{भा} - \frac{\text{ताभा}}{\text{ताय}} + \text{इ०} \right) \frac{\text{ताह}}{\text{ताय}^2} + \text{इ०}$$

$$+ \int \left(\text{ना} - \frac{\text{तापा}}{\text{ताय}} + \frac{\text{तावा}}{\text{ताय}^2} - \frac{\text{ताभा}}{\text{ताय}^2} + \text{इ०} \right) \text{ह} \text{ताय}$$

इस तरह से स्पष्ट देख पड़ता है कि \int शाताय इसके वैशेषिक गति में दो

भाग हैं एक चल चिह्न के अन्तर्गत और दूसरा चल चिह्न रहित इसमें जब y_1 और r_1 तब शा, पा आदि का मान $शा_1, पा_1$ इत्यादि और जब y_2 और r_2 तब शा, पा आदि का मान $शा_2, पा_2$ इत्यादि मानो तो y_2 , और y_1 सीमा के भीतर,

वै \int शानाय, इसका मान

$$\begin{aligned} \text{शा:वैय}_2 &= \text{शा}_1 \text{ वैय}_1 + \left(\text{पा}_2 - \frac{\text{तावा}_2}{\text{ताय}_2} + \frac{\text{ता'भा}_2}{\text{ताय}^2} - ३० \right) \text{ह}_2 \cdot \\ &= \left(\text{पा}_1 - \frac{\text{तावा}_1}{\text{ताय}_1} + \frac{\text{ता'भा}_1}{\text{ताय}_1^2} - ३० \right) \text{ह}_1 + ३० \\ &+ \int_{\text{य}_1}^{\text{य}_2} \left(\text{ना} - \frac{\text{तापा}}{\text{ताय}} + \frac{\text{ता'वा}}{\text{ताय}^2} - ३० \right) \text{ह} \text{ताय} । \end{aligned}$$

२७४। यदि $s = f(y, r, l)$ जहां y का r और l फल हैं तो यहां भी ऊपर के प्रक्रम की युक्ति से कल्पना कर सकते हो कि
ताशा = मा ताय + ना तार + पा ता प + वा ता व + ३०
+ वा ताला + पा ताया + न वा ताव + ३०

इस लिये

$$\begin{aligned} \text{वैशा} &= \text{मा वैय} + \text{ना वैर} + \text{पावैप} + \text{पावैव} + ३० \\ &+ \text{ना वैल} + \text{पा वै प} + \text{वा वैव} + ३० \end{aligned}$$

यहां ना, पा इत्यादि उसी चाल के हैं जैसे कि ना, पा ३० हैं अर्थात् r के स्थान में l को रख देने से ना पा ३० हो जायंगे ।

यहां भी यदि वैल — प वैय = ह तो ऊपर ही की युक्ति से

$$\begin{aligned} \text{वै} \int \text{शानाय} &= \text{शावैय} + \left(\text{पा} - \frac{\text{तावा}}{\text{ताय}} + \frac{\text{ता'भा}}{\text{ताय}^2} - ३० \right) \text{ह} \\ &+ \left(\text{पा} - \frac{\text{तावा}}{\text{ताय}} + \frac{\text{ता'भा}}{\text{ताय}^2} - ३० \right) \text{ह} \\ &+ \left(\text{वा} - \frac{\text{ताभा}}{\text{ताय}} + ३० \right) \frac{\text{ताह}}{\text{ताय}} \\ &+ \left(\text{वा} - \frac{\text{ताभा}}{\text{ताय}} + ३० \right) \frac{\text{ताह}}{\text{ताय}} + ३० \\ &+ \int \left(\text{ना} - \frac{\text{तापा}}{\text{ताय}} + \frac{\text{ता'वा}}{\text{ताय}^2} - ३० \right) \text{ह} \text{ताय} \\ &+ \int \left(\text{ना} - \frac{\text{तापा}}{\text{ताय}} + \frac{\text{ता'वा}}{\text{ताय}^2} - ३० \right) \text{ह} \text{ताय} \end{aligned}$$

२७५। जिस युक्ति से चलनकलन में सिद्ध है कि यदि $r = f(y)$ और r का महत्तम वा न्यूनतम मान हो तो तार = ० उसी युक्ति से जिस समय

$\int_{y_1}^{y_2}$ शाताय इसका मान महत्तम वा न्यूनतम होगा उस समय वै $\int_{y_1}^{y_2}$ शा ताय $= 0$ ऐसा होगा । परन्तु जब वै इसका मान ऐसे समय में सर्वदा शून्य होगा तब कह सकते हैं कि २७३ वें प्रक्रम में वैशेषिक का मान जो दो खण्ड में एक चल-चिह्नान्तर्गत और दूसरा चलचिह्न रहित में सिद्ध हुआ है वे दोनों पृथक् पृथक् शून्य के तुल्य होंगे जैसे ।

(१) उदाहरण, दो विन्दुओं का परमाल्प अन्तर जानना है यहां

$$\int \text{शाताय} = \int \sqrt{\left(1 + \frac{\text{तार}^2}{\text{ताय}^2}\right)} \text{ताय} = \int \sqrt{(1 + \text{प}^2)} \text{ताय}$$

$$\text{इसलिये शा} = \sqrt{(1 + \text{प}^2)} \therefore \text{ताशा} = \frac{\text{प}}{\sqrt{(1 + \text{प}^2)}} \text{ताप}$$

यहां स्पष्ट देख पड़ता है कि यदि इसे २७३ वें प्रक्रम में ताशा का जो रूप है उसके साथ तुलना करो तो

$$\text{मा} = 0, \text{ना} = 0 \text{ पा} = \frac{\text{प}}{\sqrt{(1 + \text{प}^2)}}, \text{वा} = 0,$$

और चल चिह्नान्तर्गत मान को शून्य के तुल्य करने से

$$\text{ना} - \frac{\text{तापा}}{\text{ताय}} = 0 \therefore \frac{\text{तापा}}{\text{ताय}} = 0 \therefore \text{पा} = \text{स्थिराङ्क} = \text{ग} = \frac{\text{प}}{\sqrt{(1 + \text{प}^2)}}$$

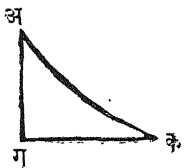
$$\text{तब ग}^2 = \frac{\text{प}^2}{1 + \text{प}^2} \therefore 1 - \text{ग}^2 = \frac{1}{1 + \text{प}^2} \text{ और } \text{प} = \frac{\text{ग}}{\sqrt{(1 - \text{ग}^2)}} = \text{अ}$$

इस लिये

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{अ तब र} = \text{अय} + \text{क अर्थात् दोनों विन्दुओं में परमाल्प अन्तर उस}$$

वक्र का चाप होगा जिसका समीकरण $\text{अय} + \text{क} = \text{र}$ यह अर्थात् सरलरेखा-रूप होगा ।

(२) दो विन्दुओं के बीच में एक ऐसा वक्र बनावो जिसमें ऊपर के विन्दु से कोई पिण्ड पृथ्वी के आकर्षण से उसके चाप में चल कर परमाल्प काल में नीचे की विन्दु पर पहुँचे । यहां चाप का प्रमाण चा ।



अग = र, कग = य, \angle अगक = समकोण, पृथ्वी के

आकर्षण का बल = वे मानो तो गतिविद्या से अ से

क तक चाप की राह से पिण्ड के आने में काल

$$\text{सेकण्ड में} = \int \frac{\frac{\text{तारा}}{\text{ताय}}}{\sqrt{2वेर}} \text{ ताय} = \frac{१}{\sqrt{2वेर}} \int \frac{\sqrt{(१+प^३)}}{\sqrt{र}} \text{ ताय} = \frac{१}{\sqrt{2वेर}} \int \text{शा ताय}$$

$$\therefore \text{शा} = \frac{\sqrt{(१+प^३)}}{\sqrt{र}} \text{ और ताशा} = -\frac{\sqrt{(१+प^३)}}{२र^{\frac{३}{२}}} \text{ तार} + \frac{प}{\sqrt{र}\sqrt{(१+प^३)}} \text{ ताप}$$

इस लिये

$$\text{मा} = ०, \text{ ना} = -\frac{\sqrt{(१+प^३)}}{२र^{\frac{३}{२}}}, \text{ पा} = \frac{प}{\sqrt{र}\sqrt{(१+प^३)}}, \text{ वा} = ०$$

और $\text{ना} - \frac{\text{तापा}}{\text{ताय}} = ० \therefore \text{ना} = \frac{\text{तापा}}{\text{ताय}}$ इसलिये इसका उत्थापन ताशा में देने से

$$\text{ताशा} = \text{तापा} \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} + \text{पा ताप} = \text{तापाप} + \text{पा ताप} = \text{ता} (\text{प} \times \text{पा})$$

इसलिये शा = पा × प + ग जहाँ ग कोई स्थिराङ्क है ।

$$\text{अब शा} = \text{पाप} + \text{ग} = \frac{\sqrt{(१+प^३)}}{\sqrt{र}} = \frac{प^३}{\sqrt{र}\sqrt{(१+प^३)}} + \text{ग}$$

$$\therefore \frac{१}{\sqrt{र}\sqrt{(१+प^३)}} = \text{ग} = \frac{१}{\sqrt{२अ}} \therefore \sqrt{(१+प^३)} = \sqrt{\frac{२अ}{र}} \text{ और}$$

$$\text{प} = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \sqrt{\frac{२अ-र}{र}} \text{ यह एक चक्रालद का समीकरण है (चलनकलन देखो)}$$

(३) उदाहरण । दो वक्रों के बीच में परमाल्प अन्तर निकालो अर्थात् दोनों वक्रों में एक एक ऐसी विन्दु ठहरावो जिनमें परमाल्प अन्तर हो ।

यहाँ (१) उदाहरण से दो विन्दुओं में परमाल्प अन्तर का समीकरण $र = अय + क$ और $\text{शा} = \sqrt{(१+प^३)}$ जहाँ प = कोई स्थिराङ्क ।

मान लो कि दोनों दिये हुए वक्रों में $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = म$, $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = न$ और जिन विन्दुओं को परमाल्प अन्तररूप सरलरेखा दोनों वक्रों को काटती है उन विन्दुओं के क्रम से भुज कोटि $र_१$, $य_१$ और $र_२$, $य_२$ हैं तो

$$\frac{\text{वैर}_१}{\text{वैय}_१} = \frac{\text{तार}_१}{\text{ताय}_१} = म \text{ और } \frac{\text{वैर}_२}{\text{वैय}_२} = \frac{\text{तार}_२}{\text{ताय}_२} = न$$

परन्तु २७३ प्रक्रम में महत्तम और न्यूनतम मान में

$$\text{शा}_२ \text{ वैय}_२ - \text{शा}_१ \text{ वैय}_१ + \text{पा}_२ \text{ ह}_२ - \text{पा}_१ \text{ ह}_१ = ०$$

परन्तु अन्तिम विन्दुओं का वैशेषिक गमन भी शून्य होगा ।

इसलिये $शा_1 वैया_1 + पा_1 ह_1 = 0$, $शा_2 वैया_2 + पा_2 ह_2 = 0$

$ह_1$ और $ह_2$ का मान २७३ वें प्रक्रम में जो है उसका उत्थापन

देने से $शा_1 वैया_1 + पा_1 (वैर_1 - प_1 वैया_1) = 0$ (१)

$शा_2 वैया_2 + पा_2 (वैर_2 - प_2 वैया_2) = 0$ (२)

(१) से $शा_1 + पा_1 म - पा_1 प_1 = 0$. \therefore $म = प_1 - \frac{शा_1}{पा_1} = - \frac{१}{प_1} = - \frac{१}{ग}$

(२) से $शा_2 + पा_2 न - पा_2 प_2 = 0$. \therefore $न = प_2 - \frac{शा_2}{पा_2} = - \frac{१}{प_2} = - \frac{१}{ग}$

$\therefore १ + ग म = 0$ और $१ + ग न = 0$ ।

यह दोनों समीकरण दिखलाते हैं कि सरलरेखा दोनों वक्रों को काटने से समकोण बनाती है। और दोनों बिन्दुओं पर गई हुई सरलरेखा का

समीकरण $र - र_1 = \frac{र_2 - र_1}{य_2 - य_1} (य - य_1)$. \therefore $ग = \frac{र_2 - र_1}{य_2 - य_1}$ इसका उत्थापन

$१ + ग म$ और $१ + ग न$ में देने से दो समीकरण होंगे और वक्रों के समीकरण पर से $य_2$ और $य_1$ के फल के वश से $र_2$, $र_1$ के जानने के लिये दो समीकरण और होंगे इस तरह से चारों समीकरणों पर से $य_2$, $य_1$, $र_2$, $र_1$ चारों के मान व्यक्त हो जायँगे ।

(४) ऐसा वक्र वताओ जिसके चाप, अवलूत के चाप, और वक्र जातीय व्यासार्द्ध से उत्पन्न क्षेत्रफल न्यूनतम हो। यहाँ १३१ वें प्रक्रम से यदि फल का मान आ मानो तो

$\frac{ताआ}{ताय} = \frac{वि}{२} \frac{तावा}{ताय} = \frac{(१ + प^२)^{\frac{३}{२}}}{-२व} \sqrt{(१ + प^२)} = \frac{(१ + प^२)^{\frac{३}{२}}}{-२व}$ (चलनकलन से)

इसलिये $शा = \frac{(१ + प^२)^{\frac{३}{२}}}{व}$ यहाँ शा के मान में केवल प और व हैं

इसलिये २७३ वें प्रक्रम से $ताशा = पाताप + बाताव$

और $\frac{तावा}{ताय} - \frac{तापा}{ताय} = 0$. \therefore $पा = \frac{तावा}{ताय} - गा_१$

इसलिये $ताशा = \frac{ता वा ता प}{ताय} + ताप गा_१ + बाताव$

$= तावाव + बाताव + तापगा_१$

इसलिये $शा = वा व + प गा_१ + गा_२ = \frac{(१ + प^२)^{\frac{३}{२}}}{व} \dots \dots \dots (१)$

जहाँ $गा_1$ और $गा_2$ कोई स्थिराङ्क हैं ।

$$\text{परन्तु शा} = \frac{(१ + प^२)^२}{व} \therefore \text{ता शा} = \frac{४ प(१ + प^२) ताप}{व} - \frac{(१ + प^२)^२}{व^२} \text{ ताब}$$

इसलिये २७३ वें प्रक्रम से वा = $-\frac{(१ + प^२)^२}{व^२}$ इसका उत्थापन (१) में देने

$$\text{से } \frac{(१ + प^२)^२}{व} = -\frac{(१ + प^२)^२}{व^२} व + प गा_1 + गा_2$$

$$\text{इसलिये } \frac{व(गा_2 प + गा_1)}{(१ + प^२)^२} = २$$

चलानयन से

$$गा_2 स्प^{-२} प + \frac{गा_2 प - गा_1}{(१ + प^२)} = ४ य + गा_2, \dots \dots \dots (२)$$

$$\text{और } \frac{व(गा_1 प^२ + गा_2 प)}{(१ + प^२)^२} = २ प$$

चलानयन से

$$गा_1 स्प^{-२} प - \frac{प \times गा_1 + गा_2}{१ + प^२} = ४ र + स्थिराङ्क$$

इसमें $गा_2$ जोड़ देने से

$$गा_1 स्प^{-२} प + \frac{प(गा_2 प - गा_1)}{१ + प^२} = ४ र + गा_2, \dots \dots \dots (३)$$

(२) और (३) से स्प^{-२} प को लोप कर देने से

$$\frac{(गा_2 प - गा_1)^२}{(१ + प^२)} = ४ गा_2 र - ४ गा_1 य + गा_2 गा_2 - गा_1 गा_2$$

$$\text{इस लिये } \sqrt{(१ + प^२)} = \frac{गा_2 प - गा_1}{२\sqrt{(गा_2 र - गा_1 य + का)}}$$

जहाँ $४ का = गा_2 गा_2 - गा_1 गा_1$

कल्पना करो कि एक स्थिर विन्दु से गणना करने से वक्र के चाप का प्रमाण चा है तो चलानयन से चा + गा = $\sqrt{(गा_2 र - गा_1 य + का)} \dots (४)$

मूल विन्दु और अक्षों के परिवर्तन से (४) का रूप

चा = $\sqrt{टअय + स्थिराङ्क}$ ऐसा हो सकता है जो कि ७१ वें प्रक्रम से चक्रालद का समीकरण है ।

(५) आकाश में दो विन्दुओं का परमाल्प अन्तर क्या होगा ।

दोनों विन्दुओं का अन्तर चा मानो तो

$$\text{ताचा} = \sqrt{\{\text{ताय}^2 + \text{तार}^2 + \text{ताल}^2\}} = \text{स}$$

इस लिये २७२ वें प्रक्रम से खण्ड तात्कालिकी गति पर से

$$\frac{\text{तास}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ताय}^2}{\text{स}} = \frac{\text{ताय}}{\text{स}} \text{ ता ताय, } \frac{\text{तास}}{\text{तार}} = \frac{\text{तार}}{\text{स}} \text{ ता तार और } \frac{\text{तास}}{\text{ताल}} = \frac{\text{ताल}}{\text{स}} \text{ ता ताल}$$

$$\text{इस लिये वै} \int \text{स} = \int \text{वैस} = \int \text{वैताचा} = \int \frac{\text{ताय}}{\text{ताचा}} \text{वैताय} + \int \frac{\text{तार}}{\text{ताचा}} \text{वैतार} + \int \frac{\text{ताल}}{\text{ताचा}} \text{वैताल}$$

$$= \frac{\text{ताय}}{\text{ताचा}} \text{वैय} + \frac{\text{र}}{\text{ताचा}} \text{वैर} + \frac{\text{ताल}}{\text{ताचा}} \text{वैल} - \int \left\{ \text{ता} \left(\frac{\text{ताय}}{\text{ताचा}} \right) \text{वैय} - \text{ता} \left(\frac{\text{तार}}{\text{ताचा}} \right) \text{वैर} + \text{ता} \left(\frac{\text{ताल}}{\text{ताचा}} \right) \text{वैल} \right.$$

इस लिये मा = ०, म = ० मां = ०, (क्योंकि न्यूनतम मान में सब पृथक् पृथक् शून्य के तुल्य होंगे)

$$\text{ना} = \frac{\text{ताय}}{\text{ताचा}}, \text{न} = \frac{\text{तार}}{\text{ताचा}}, \text{नां} = \frac{\text{ताल}}{\text{ताचा}}, \text{ताना} = ० = \text{तान} = \text{तानां}$$

$$\therefore \frac{\text{ताय}}{\text{ताचा}} = \text{अ}, \frac{\text{तार}}{\text{ताचा}} = \text{क}, \frac{\text{ताल}}{\text{ताचा}} = \text{ग},$$

$$\text{और } \frac{\text{ताय}^2}{\text{ताचा}^2} + \frac{\text{तार}^2}{\text{ताचा}^2} + \frac{\text{ताल}^2}{\text{ताचा}^2} = १ = \text{अ}^2 + \text{क}^2 + \text{ग}^2$$

$$\text{और } \frac{\text{ताय}}{\text{ताल}} = \frac{\text{अ}}{\text{ग}}, \frac{\text{तार}}{\text{ताल}} = \frac{\text{क}}{\text{ग}} \therefore \text{य} = \frac{\text{अ}}{\text{ग}} \text{ ल} + \text{ग}, \text{र} = \frac{\text{क}}{\text{ग}} \text{ ल} + \text{ग}$$

यह इष्ट धरातल में एक सरल रेखा को पतित करने से जो सरलरेखा होती है उसका समीकरण है ।

(६) जिस घनक्षेत्र के पृष्ठ का समीकरण दिया है उसके पृष्ठ पर दिये हुए दो बिन्दुओं के बीच में परमावय रेखा का प्रमाण क्या होगा ।

कल्पना करो कि दिये हुए पृष्ठ के समीकरण पर से

ताल = प ताय + वा तार ऐसा समीकरण बनता है जहाँ प, और व, य, र के फल हैं । तो वैल = प वै य + व वैर ऐसा होगा इसका उत्थापन (५) वें उदाहरण में देने से

$$\text{वै} \int \text{ताचा} = \left[\frac{\text{ताय}}{\text{ताचा}} + \text{प} \frac{\text{ताल}}{\text{ताचा}} \right] \text{वैय} + \left[\frac{\text{तार}}{\text{ताचा}} + \text{व} \frac{\text{ताल}}{\text{ताचा}} \right] \text{वैर}$$

$$- \int \left\{ \left[\text{ता} \frac{\text{ताय}}{\text{ताचा}} + \text{प ता} \frac{\text{ताल}}{\text{ताचा}} \right] \text{वैय} + \left[\text{ता} \frac{\text{तार}}{\text{ताचा}} + \text{ब ता} \frac{\text{ताल}}{\text{ताचा}} \right] \text{वैर} \right\}$$

इसलिये परमाल्प अन्तर में

$$\text{ता} \left[\frac{\text{ताय}}{\text{ताचा}} \right] + \text{प ता} \left[\frac{\text{ताल}}{\text{ताचा}} \right] = 0, \text{ और ता} \frac{\text{तार}}{\text{ताचा}} + \text{ब ता} \left[\frac{\text{ताल}}{\text{ताचा}} \right] = 0 \quad (१)$$

पृष्ठ के समीकरण पर से प और ब का मान निकाल फिर जो रेखा परमाल्प अन्तर रूप होगी उसका समीकरण (१) के बल से निकाल सकते हो । जैसे

यदि पृष्ठ का समीकरण ल = फ (य^२ + र^२) ऐसा हो तो

यहाँ प = २ य फ' (य^२ + र^२), ब = २र फ' (य^२ + र^२) और मान लो कि चा स्वतन्त्र राशि है तो (१) से

$$\frac{\text{ताय}}{\text{ताचा}} + \text{प} \frac{\text{ताल}}{\text{ताचा}} = \frac{\text{ताय}}{\text{ताचा}} + २ \text{ य फ}' (\text{य}^२ + \text{र}^२) \frac{\text{ताल}}{\text{ताचा}} = 0, \dots \dots (२)$$

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताचा}} + \text{ब} \frac{\text{ताल}}{\text{ताचा}} = \frac{\text{तार}}{\text{ताचा}} + २र \text{ फ}' (\text{य}^२ + \text{र}^२) \frac{\text{ताल}}{\text{ताचा}} = 0, \dots \dots (३)$$

(२) को र से और (३) को य से गुण कर अन्तर करने से

$$र \frac{\text{ताय}}{\text{ताचा}} = \text{य} \frac{\text{तार}}{\text{ताचा}} \text{ यहाँ यदि } \text{श्रु}^२ = \text{य}^२ + \text{र}^२ \text{ और } \text{प} = \text{कोज्या}^{-२} \frac{\text{य}}{\text{श्रु}}$$

$$\text{तो } र \text{ ता'य} - \text{य ता'र} = \text{ता} (\text{श्रु}^२ \text{ ताष}) = 0$$

$$\therefore \text{श्रु}^० \frac{\text{ताष}}{\text{ताचा}} = \text{स्थिराङ्क} = \text{ग और } \text{श्रु} \cdot \frac{\text{ताष}}{\text{ताचा}} = \frac{\text{ग}}{\text{श्रु}}$$

परन्तु श्रु $\frac{\text{ताष}}{\text{ताचा}}$ यह उस कोण की ज्या है जो कि परमाल्प रेखा उस वक्र को काटकर उत्पन्न करती है जो वक्र कि स्वयं घूम कर घन का पृष्ठ बनाया है । इसलिये इस कोण को यदि भ कहो तो

$$\text{ज्याभ} = \frac{\text{ग}}{\text{श्रु}} = \frac{\text{ग}}{\sqrt{(\text{य}^२ + \text{र}^२)}} ।$$

अथवा जब $\text{श्रु}^२ \frac{\text{ताष}}{\text{ताचा}} = \text{ग}$ इसलिये

$$\text{श्रु}^२ \frac{\text{ताष}^२}{\text{ताश्रु}^२} = \text{ग}^२ \frac{\text{ताचा}^२}{\text{ताश्रु}^२} = \text{ग}^२ \left(१ + \text{श्रु}^२ \frac{\text{ताष}^२}{\text{ताश्रु}^२} + \frac{\text{ताल}^२}{\text{ताश्रु}^२} \right)$$

(७५ वाँ और ९८ वाँ प्रक्रम देखो)

$$\text{समशोधन से } \text{श्रु}^२ (\text{श्रु}^२ - \text{ग}^२) \frac{\text{ताष}^२}{\text{ताश्रु}^२} = \text{ग}^२ [१ + \text{फ}' \{ \text{र}^२ \}]$$

$$\text{इसलिये } \frac{\text{ताष}}{\text{ताश्रु}} = \frac{\text{ग}}{\text{श्रु}} \sqrt{\left\{ \frac{१ + \text{फ}^1(\text{र}^2)}{\text{श्रु}^2 - \text{ग}^2} \right\}} \dots \dots \dots (४)$$

कल्पना करो कि घनक्षेत्र गोल है और यह याम्योत्तर वृत्त के घूमने से बना है प्राक् कपाल में क्षितिज के ऊपर कहीं रविकेन्द्र और चन्द्रकेन्द्र दो दत्त विन्दु हैं इन दोनों के भीतर गोलपृष्ठ पर परमाल्प रेखा खींचना है। कल्पना करौ कि परमाल्प रेखा याम्योत्तर वृत्त के साथ भ कोण बनाती है।

ल अक्ष गोल में जहाँ लगा है वहाँ से परमाल्प रेखा और याम्योत्तर वृत्त के सम्पात तक एक महद्वृत्त अ अंश, और गोल का व्यासार्द्ध त्रि तो यहाँ यदि त्रिकोणमिति से १ व्यासार्द्ध में जैसा कि सर्वत्र इस ग्रन्थ भर में है ज्यासाधन करो तो श्रु = त्रिज्याअ,

$$\text{और ऊपर की युक्ति से ज्याभ} = \frac{\text{ग}}{\text{श्रु}} = \frac{\text{ग}}{\text{त्रिज्याअ}} \therefore \text{ज्याभ} \times \text{ज्याअ} = \frac{\text{ग}}{\text{त्रि}}$$

अर्थात् दोनों जीवाओं का घात सर्वदा स्थिर है जो कि महद्वृत्त में धर्म पाया जाता है इसलिये दोनों विन्दुओं में होकर जो महद्वृत्त जायगा उसमें दोनों विन्दुओं के भीतर जो चाप होगा वही परमाल्प अन्तर होगा।

२७४। बहुत से प्रश्न ऐसे हैं जिन्हें कि साम्वन्धिक महत्तम और न्यूनतम कहते हैं। समझो कि दो सीमाओं के भीतर किसी फल का चलानयन करने से ऐसा मान \int स जानना है जो महत्तम वा न्यूनतम हो इस नियम से कि उन्हीं चलराशिओं के दूसरे फल का उन्हीं सीमाओं के भीतर चलमान \int स_१ एक दिये हुए स्थिर संख्या के तुल्य हो। जैसे वक्र के परिधि का मान स्थिर ग के तुल्य हो और फल महत्तम हो इस नियम से पता लगावो कि कौन सा वक्र है।

ऐसे प्रश्नों के उत्तर करने में \int स_१ को एक स्थिर संख्या अ से गुण कर \int स में जोड़ देते हैं फिर इसके वैशेषिक को शून्य के समान करते हैं क्योंकि महत्तम वा न्यूनतम मान में

$$\text{वै} \left(\int \text{स} + \text{अ} \int \text{स}_१ \right) \text{ताय} = \text{वै} \int \text{सताय} + \text{अ वै} \int \text{स}_१ \text{ताय} = ० + ०$$

क्योंकि प्रश्न के अनुसार \int सताय यह महत्तम वा न्यूनतम है इसलिये

वै \int सताय = ० और \int स_२ ताय = ग = स्थिराङ्क इसलिये वै \int स_२ ताय = ० । इसी तरह प्रश्न में यदि यह नियम हो कि \int सताय महत्तम वा न्यूनतम और \int स_२ताय और \int स_३ताय स्थिराङ्क तो \int स_२ताय को दूसरे स्थिराङ्क क से गुण कर ऊपर के योग में जोड़ कर इसके वैशेषिक को शून्य के समान करो अर्थात् वै $\{ \int$ सताय + अ \int स_२ताय + क \int स_३ताय $\} = ०$ फिर प्रश्न के वश से अ, क स्थिराङ्क का ज्ञान भी हो जायगा ।

(१) उदाहरण । बहुत से वक्र हैं जिन सभी का परिधि मान स्थिर ग के तुल्य है तो बतावो कि किस का क्षेत्रफल सबसे बड़ा होगा ।

$$\text{यहां प्रश्न की बोली से } \int \text{स_२ताय} = \int \sqrt{(१ + य^२)} \text{ताय} = ग,$$

$$\int \text{स ताय} = \int \text{र ताय}$$

$$\text{इस लिये } \int \text{शा ताय} = \int \{ \text{र} + \text{अ} \sqrt{(१ + प^२)} \} \text{ताय और}$$

$$\text{शा} = \text{र} + \text{अ} \sqrt{(१ + प^२)} \text{ फिर २७३ वें प्रक्रम और २७५ वें प्रक्रम से}$$

$$\text{ताशा} = \text{तार} + \frac{\text{अप}}{\sqrt{(१ + प^२)}} \text{ताय और, ना} = १ \text{ पा} = \frac{\text{अप}}{\sqrt{(१ + प^२)}} \text{ वा} = ०$$

$$\text{इस लिये शा} = \text{पाप} + \text{स्थि और } \text{र} + \text{अ} \sqrt{(१ + प^२)} = \frac{\text{अप}^२}{\sqrt{(१ + प^२)}} + \text{ग}_२$$

$$\text{समशोधन से } \text{र} - \text{ग}_२ = - \frac{\text{अ}}{\sqrt{(१ + प^२)}} \text{ इस लिये प} = \frac{\sqrt{\{ \text{अ}^२ - (\text{र} - \text{ग}_२)^२ \}}}{\text{र} - \text{ग}_२} = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$$

$$\text{और ताय} = \frac{(\text{र} - \text{ग}_२) \text{तार}}{\sqrt{\{ \text{अ}^२ - (\text{र} - \text{ग}_२)^२ \}}} \text{ चलानयन से}$$

$$\text{य} - \text{ग}_२ = - \sqrt{\{ \text{अ}^२ - (\text{र} - \text{ग}_२)^२ \}}$$

इस लिये $(\text{य} - \text{ग}_२)^२ + (\text{र} - \text{ग}_२)^२ = \text{अ}^२$ परन्तु यह वृत्त का समीकरण है इस लिये सब से बड़ा वृत्त फल का होगा ।

यह प्रश्न और २७५ प्रक्रम का (२) प्रश्न दोनों सन् १६९६ ई० में जान वर्नली (John Bernoulli) के निकाले हुए हैं और जान वर्नली ने इन के उत्तर को भी वैशेषिक कलन की रीति से निकाला । वैशेषिककलन के प्रचार के जड़ भी यही दोनों प्रश्न हैं ।

२७५ प्रक्रम का (२) जो प्रश्न है उसे ऐसे भी कह सकते हो कि एक ऐसी पतली कांच की टेढ़ी पोली नली जिसके दोनों शिरे खुले हों बनाओ जिसके ऊपर के शिरे पर यदि एक गुरु परमाणु पदार्थ छोड़ दें तो वह परमाणु काल में नीचे के शिरे पर पहुँच जाय ।

इस प्रश्न को अङ्गरेज़ी में ब्याचिसटोक़ोन प्रश्न का (Problem of the brachistochrone) कहते हैं ।

(२) उदाहरण । य अक्ष के चारो ओर एक वक्र को घुमाकर एक ऐसा घनक्षेत्र बनाया चाहते हैं जो य अक्षगत नियत दो बिन्दुओं पर जाय और जिस का पृष्ठफल स्थिर ग के तुल्य और घनफल महत्तम हो तो उस वक्र का समीकरण बताओ ।

$$\text{यहां पृष्ठफल} = 2\pi \int r\sqrt{(1+p^2)} \text{ ताय} = g \text{ और घनफल} = \pi \int r^2 \text{ ताय}$$

इस लिये ऊपर की युक्ति से

$$\pi \int r^2 \text{ ताय} + 2\pi a \int r\sqrt{(1+p^2)} \text{ ताय यह}$$

$$\text{वा } \int r^2 \text{ ताय} + 2a \int r\sqrt{(1+p^2)} \text{ ताय} = \int \text{शा ताय}$$

यह महत्तम होगा

इस लिये शा = $r^2 + 2ar\sqrt{(1+p^2)}$ और

$$\text{ताशा} = 2r \text{ तार} + 2a \text{ तार} \sqrt{(1+p^2)} + \frac{2ar p}{\sqrt{(1+p^2)}} \text{ ताय}$$

$$\text{इस लिये मा} = 0, \text{ ना} = 2r + 2a\sqrt{(1+p^2)} \text{ और पा} = \frac{2ar p}{\sqrt{(1+p^2)}}$$

$$\text{इस लिये मा} = 0, \text{ ना} = 2r + 2a\sqrt{(1+p^2)} \text{ और पा} = \frac{2ar p}{\sqrt{(1+p^2)}}$$

$$\text{इस लिये शा} = \text{पा} \times \text{प} + \text{स्थि} = \frac{2ar p^2}{\sqrt{(1+p^2)}} + g,$$

$$= r^2 + 2ar\sqrt{(1+p^2)}$$

$$g - r^2 = 2ar \left\{ \sqrt{(1+p^2)} - \frac{p^2}{\sqrt{(1+p^2)}} \right\} = \frac{2ar}{\sqrt{(1+p^2)}} \dots (१)$$

यहां प्रश्न के अनुसार वक्र य अक्ष को दो बिन्दुओं पर काटता है इस लिये उन स्थानों में $r = 0$ इस का उत्थापन (१) में देने से $g = 0$ इस लिये

$$\frac{2अर}{\sqrt{(१+प^२)}} + र^२ = र \left\{ र + \frac{२अ}{\sqrt{(१+प^२)}} \right\} = ०$$

$$\text{इस में यदि } र + \frac{२अ}{\sqrt{(१+प^२)}} = ० \text{ तो } \frac{४अ^२}{१+प^२} = र^२$$

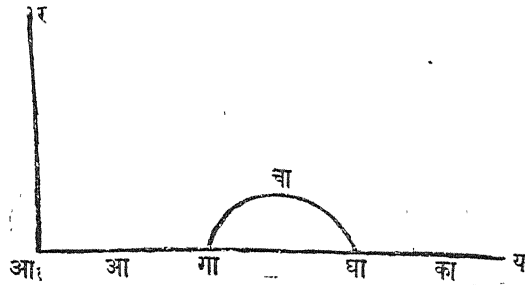
$$\therefore प^२ + १ = \frac{४अ^२}{र^२} \text{ इसलिये } प = \frac{\sqrt{४अ^२-र^२}}{र} = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$$

$$\text{इसलिये } \frac{र}{\sqrt{(४अ^२-र^२)}} = \frac{\text{ताय}}{\text{तार}} \therefore \frac{र \text{ तार}}{\sqrt{(४अ^२-र^२)}} = \text{ताय}$$

$$\therefore \sqrt{(४अ^२-र^२)} = य-ग, \therefore र^२ + (य-ग)^२ = ४अ^२$$

यह एक वृत्त का समीकरण है जिस का केन्द्र य अक्ष पर और व्यासार्ध = —२अ है ।

कल्पना करो कि य अक्ष में आ, और का बिन्दु नियत है जिनके ऊपर हो कर प्रश्न के अनुसार वक्र को जाना चाहिये । तो यदि आ, का के व्यास मान कर एक गोल बनाया जाय और प्रश्न में दिया हुआ स्थिर पृष्ठफल इस गोल के पृष्ठफल के बराबर हो तो इस गोल में प्रश्नोक्त सब आलाप घट जायँगे परन्तु यदि दिया हुआ पृष्ठफल इस गोल के पृष्ठफल के बराबर न हो किन्तु य अक्ष में गा, और घा बिन्दु जो हैं उन के अन्तर को व्यास मान कर जो गोल होगा उसके पृष्ठफल के बराबर हो तो ऐसी स्थिति में ऐसा समझना चाहिये कि आग, य अक्ष का भाग, गाघा व्यास पर बना गाचाघा वृत्तार्ध और य अक्ष का घाका भाग



इन तीनों को एक में मिला देने से आगाचाघा का यह जो आ और का दो नियत बिन्दुओं पर गया हुआ य र धरातल में एक वक्र है य अक्ष के चारो ओर उस के घूमने से अभीष्ट घनक्षेत्र होगा जिसका

पृष्ठफल दिये हुए पृष्ठफल के समान और घनफल महत्तम होगा ।

इसी तरह यदि आका से गाघा बड़ा हो तो भी समझ लेना चाहिये ।

ऊपर का समीकरण भी दिखलाता है कि जब $र \left\{ र + \frac{२अ}{\sqrt{(१+प^२)}} \right\} = ०$ तो

$र = ०$ यह भी एक वक्र का समीकरण होगा जो कि यहां पर आगा और घाका सरल रेखा के समान होगा ।

इस प्रकार से बुद्धिमान को चाहिये कि इस ग्रन्थ में दिखलाये गये जो सिद्धान्त हैं उनके अभ्यास से नाना प्रकार की कल्पना अपने बुद्धिबल से करे ।

अभ्यास के लिये प्रश्न ।

१। $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\text{अकोज्या}\phi} \text{फ}(\text{श्रु}, \phi) \text{श्रु ताश्रुताष}$ इसमें क्रम को बदलो

उत्तर $\int_0^{2\text{अ}} \int_0^{\text{कोज्या}^{-2} \text{श्रु}} \frac{\text{श्रु}}{2\text{अ}} \text{फ}(\text{श्रु}, \phi) \text{श्रुताषतार}$

२। $\int_0^1 \int_{\phi}^{y(2-y)} \text{फ}(y, r) \text{तार ताय}$ इसमें क्रम को बदल देना है ।

उ० $\int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-r}}^r \text{फ}(y, r) \text{ताय तार}$

३। $\int_0^{2\text{अ}} \int_{\frac{y^2}{4\text{अ}}}^{3\text{अ}-y} \text{फ}(y, r) \text{तार ताय}$ इसमें क्रम को बदलना है ।

उ० $\int_0^{\text{अ}} \int_0^{2\sqrt{\text{अ}r}} \text{फ}(y, r) \text{ताय तार} + \int_{\text{अ}}^{3\text{अ}} \int_0^{3\text{अ}-r} \text{फ}(y, r) \text{ताय तार}$

४। $\int_0^{\text{अ}} \int_{\sqrt{\text{अ}^2-y^2}}^{y+2\text{अ}} \text{फ}(y, r) \text{तार ताय}$ इसका क्रम बदलने से कैसा रूप होगा ।

उ० $\int_0^{\text{अ}} \int_{\sqrt{\text{अ}^2-r^2}}^{\text{अ}} \text{फ}(y, r) \text{ताय तार} + \int_{\text{अ}}^{2\text{अ}} \int_0^{\text{अ}} \text{फ}(y, r) \text{तायतार}$
 $+ \int_{2\text{अ}}^{3\text{अ}} \int_{r-2\text{अ}}^{\text{अ}} \text{फ}(y, r) \text{ताय तार}$

५। यदि $y = \text{अज्या}\phi\text{ज्या}\phi$, और $r = \text{क कोज्या}\phi\text{ज्या}\phi$

तो सिद्ध करो कि बदलने से $\int \int$ तार ताय इस द्विगुण चल का

$\pm \int \int$ अक ज्याष, कोज्याष, ताष ताष, पेसा रूप होगा ।

६। यदि $y = \text{वज्या}\text{अ}_r + \text{श कोज्या}\text{अ}_r$

और $r = \text{वकोज्या}\text{अ}_r - \text{शज्या}\text{अ}_r$ तो सिद्ध करो कि

$$\iint \text{फ}(य, र) \frac{\text{तार ताय}}{\sqrt{(१-य^२-र^२)}} = \iint \text{फ}_१(व, श) \frac{\text{ताश ताव}}{\sqrt{(१-व^२-श^२)}}$$

७। सिद्ध करो कि

$$\int_०^{\infty} \int_०^{\infty} \text{फ}(अ^२य^२ + क^२र^२) \text{तार ताय} \frac{\pi}{४\text{अक}} \int_०^{\infty} \text{फ}(य) \text{ताय}$$

$$८। \iint \frac{१}{४} \frac{-(य^२ + २यर\text{कोज्या}\alpha_r + र^२)}{\text{तार ताय}} \text{इसको अक्षीय भुज-}$$

युग्म के रूप में बदलो और तब दिखलावो कि यदि य और र की सीमा ० और

∞ हों तो द्विगुण चल का मान $\frac{\text{अ}_r}{२\text{ज्या}\alpha_r}$ होगा ।

९। सिद्ध करो कि

$$\int_०^{\text{अ}} \int_०^{\text{क}} \frac{\text{तार ताय}}{(ग^२ + य^२ + र^२)^{\frac{३}{२}}} = \frac{१}{ग} \text{स्प}^{-२} \frac{\text{अक}}{ग\sqrt{(अ^२ + क^२ + ग^२)}}$$

१०। अक्षीय भुजयुग्म के रूप में बदल कर सिद्ध करो कि

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{अ तार ताय}}{(य^२ + र^२ + अ^२)^{\frac{३}{२}} (य^२ + र^२ + अ^२)^{\frac{३}{२}}} = \frac{२\pi}{\text{अ} + \text{अ}}$$

११। यदि य = श्रुकोज्याप + अज्याप और र = श्रुज्याष + अकोज्याप

तो $\iint \text{फ}(य, र) \text{तार ताय}$ इसको बदलने से कैसा रूप होगा ।

३० $\iint \text{फ}(\text{श्रुकोज्याप} + \text{अज्याप}, \text{श्रुज्याष} + \text{अकोज्याष}) (\text{अज्यारष} - \text{श्रु}) \text{तारताप}$

१२। सिद्ध करो कि $\int \int \frac{\sqrt{(१-य^२-र^२)}}{\sqrt{(१+य^२+र^२)}} \text{तार ताय} = \frac{\pi}{४} \left(\frac{\pi}{२} - १\right)$

यहां चलानयन य, और र के सब धनमानों के भीतर किया गया है और $य^२ + र^२ < १$ ।

१३। सिद्ध करो कि

$$\iiint \dots \frac{\text{ताय तार ताल} \dots}{\sqrt{(१-य^२-र^२-ल^२-\dots)}} = \frac{\pi \frac{\text{न} + १}{२}}{२^n \text{गा} \left(\frac{\text{न} + १}{२}\right)}$$

जहां चलराशियों की संख्या न है और चलानयन सब धन मान के भीतर किया गया है जो कि $य^२ + र^२ + ल^२ + \dots < १$ इस नियम से सिद्ध होते हैं ।

१४। सिद्ध करो कि

$$\text{ज्या } \frac{1}{2} \text{ य} = \frac{c}{\pi} \left(\frac{\text{ज्याय}}{2^2-1} - \frac{2\text{ज्या}2\text{य}}{2^2 \cdot 2^2-1} + \frac{3\text{ज्या}3\text{य}}{2^2 \cdot 3^2-1} - \frac{4\text{ज्या}4\text{य}}{2^2 \cdot 4^2-1} + \dots \right)$$

१५। सिद्ध करो कि

$$\text{कोज्या } \frac{1}{2} \text{ य} = \frac{c}{\pi} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{\text{कोज्याय}}{2^2-1} - \frac{1}{2} \frac{\text{कोज्या}2\text{य}}{2^2 \cdot 2^2-1} + \dots \right\}$$

१६। एक मनुष्य से ३० हाथ के अन्तर पर दक्षिण ओर उस का पोसा तीतर था जैसे ही मनुष्य पूर्व की ओर चलने लगा वैसे ही तीतर भी मनुष्य के पास पहुँचने के लिये चला तो बतावो कि प्रथम स्थान से पूर्व की ओर कितनी दूरी पर मनुष्य और तीतर से भेंट हुई। इस प्रश्न में इतना जानते हैं कि प्रतिक्षण में मनुष्य से दूना तीतर चलता था।

उ० २० हाथ।

१७। सौ हाथ ऊँचे एक तालवृक्ष के ऊपर एक कौआ बैठा था उसने पेड़ की जड़ से दक्षिण ओर २५ हाथ के अन्तर पर दक्षिण ही की ओर जाता एक मूसे को देख कर उसकी दूनी गति से पकड़ने के लिये झपटा तो बतावो कि पेड़ की जड़ से कितने हाथ पर कौआ ने मूसे को पकड़ा।

उ० १८३ $\frac{1}{3}$ हाथ।

१८। पृथ्वी से १०,००० हाथ ऊँचे पर जा कर एक कबूतर ने पृथ्वी पर ठीक अपने पैर के नीचे चावलों को देख कर एक पल में २०० हाथ की गति से उतरने लगा परन्तु उस समय पूर्व की वायु एक चाल से बहती थी जिसके कारण एक पल की गति कबूतर की पूर्व की ओर भी १०० हाथ हो गई तो बतावो कि कितने पल में वह कबूतर पृथ्वी पर पहुँचा।

उ० ६६ $\frac{2}{3}$ पल

१९। २६७ प्रक्रम के (६) वें प्रश्न में मोर और साँप के योग से वक्र त्रिबाहु होगा उसका क्षेत्रफल क्या होगा। उ०, फल = $\frac{(२ इ' क - इ' ग) अ}{४ गु^२ - १}$

२०। १६ वें प्रश्न में मनुष्य और तीतर के योग से जो वक्र त्रिबाहु होगा उसका फल क्या होगा।

उ० फल = १२०

२१। १७ वें प्रश्न में काक और मूस के योग से जो वक्र त्रिबाहु होगा उस का फल बतावो।

$$\text{उ० फल} = \frac{\text{कोटि} (२ गु^२ \times \text{मुज} + गु \times \text{कर्ण})}{४ गु^२ - २}$$

$$\text{यहां गु} = \frac{\text{काक गति}}{\text{सूस की गति}}$$

२२। १८ वें प्रश्न में कपोत जिस वक्र में पृथ्वी पर उतरेगा उससे और कपोत की उँचाई १०,००० से जो चापक्षेत्र होगा उसका क्या फल होगा।

$$\text{उ० फल} = \frac{२(१०,०००)^२}{३}$$

२३। एक वक्र ऐसा बनाओ जिसमें $\int \frac{p^2}{r+p^2}$ ताय इसका मान न्यूनतम हो।

$$\text{उ० } r = \frac{g(१+p^2)^2}{p^2}, \text{ य} = g_1 + g\left(\frac{३}{४p^2} + \frac{१+p^2}{p^2} + \text{ला } p\right)$$

२४। जिस सूच्याकार शङ्कु के पृष्ठ का ल = $३\sqrt{(य^2+r^2)}$ = ३ श्रु यह समीकरण है उसके पृष्ठ पर दो दिये हुए विन्दुओं के बीच में जो परमालप रेखा होगी उसका समीकरण बताओ। उ० श्रु = गळे $\left\{ \frac{प + ग_1}{\sqrt{(१+इ^2)}} \right\}$

२५। वक्र का चाप और फल स्थिर है और यह वक्र य अक्ष के चारो ओर घूम कर ऐसा घनक्षेत्र बनाता है जिसका घनफल महत्तम है तो वक्र का पता लगाओ। उ० यहां शा = $\pi r^2 + \text{कर} + ४\sqrt{(१+p^2)}$ ऐसा होगा फिर इस पर से २७६ प्रक्रम की क्रिया कर वक्र का समीकरण जानो।

२६। सब वक्रों में क्षेत्रफल स्थिर है तो बताओ किसकी परिधि सब से छोटी होगी। उ० वृत्त की।

२७। वक्र का चाप स्थिर है और यह य अक्ष के चारो ओर घूम कर एक ऐसा घनक्षेत्र बनाता है जिसका न्यूनतम पृष्ठफल है तो बताओ वह कौन सा वक्र है। उ० कातन्वली (Catenary)

२८। एक नींव में जड़ से दो शाखा फूटी थीं जिन का झुकाव ३०° था। पहली शाखा पर जड़ से ८ हाथ के अन्तर पर एक मैना बैठी थी और दूसरी शाखा पर जड़ से $३ + ४\sqrt{३}$ हाथ के अन्तर पर एक कीड़ा बैठा था। यह जैसे ही शाखा के ऊपर की ओर चलने लगा वैसे ही इस पर मैना झपटी तो बताओ कि पहले स्थान से कितनी दूर जाने पर मैना ने उस कीड़े को पकड़ लिया। इस प्रश्न में इतना हम जानते हैं कि कीड़े से मैना दूनी चलती थी।

$$\text{उ० } ४\frac{१}{३} \text{ हाथ}$$

२९। एक महाजन ने एक ज्यौतिषी से प्रसन्न होकर कहा कि कल आप एक पीतर का डब्बा किसी से बनवा कर लेते आइयेगा जो कि ठीक मेरी रूमाल से चारो ओर बंध जाय तो मैं उस डब्बे को अशर्कियों से भर कर आपको सङ्कल्प करूँगा । बतावो ज्यौतिषी कैसा डब्बा बनावे जिसमें उसे बहुत अशर्कियां मिलें । इतना यहां पर हम जानते हैं कि उस धनी के रूमाल की लम्बाई साढ़ेपांच हाथ और चौड़ाई पौने दो हाथ थी ।

उ० यदि व्यास परिधि का सम्बन्ध $\frac{२७}{३}$ हो तो पौने दो हाथ के व्यास का जो एक गोलाकार डब्बा बनेगा उस में सबसे अधिक अशर्कियां भरेंगी ।

हरिगीत

रखि हैं कृपालुद्विवेदिसुतकृत सुकृतिजन मन लाय के ।
 चलराशिकलन वरासि कल नवराशि चरममिलाय के ॥
 धरि शान जौ बुद्धिबल गरवदलि सकल खलहि हिलाय के ।
 धन धान मान महान लहि हैं होय प्रिय नृप राय के ॥
 इतिश्रीकृपालुदत्तसुतश्रीसुधाकरद्विवेदिकृतं चलराशिकलनं
 सम्पूर्णम् ॥

सित सावन शनि तेरस बरस विरोधि ।
 पूरन कियेउ सुधाकर सब विधि शोधि ॥

